L1 Economie/Gestion | Cours Luc Joseph
Probabilités statistiques | TD Zineb Ramiche
Année 2023/2024

Exercice 1. *Le tableau suivant donne la répartition des salaires (mensuels en euros) dans une entreprises de 200 salariés:*

Salaire x_i	*[1000,1400[*	*[1400,1800[*	*[1800,3000[*
Effectifs n_i	*70*	*70*	*60*
amplitude a_i	*400*	*400*	*1200*
centre c_i	*1200*	*1600*	*2400*
Fréquence f_i	$\frac{7}{20}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{6}{20}$
Fréquence corrigé $\frac{f_i}{a_i}$	$\frac{7}{20} * \frac{1}{400}$	$\frac{7}{20} * \frac{1}{400}$	$\frac{6}{20} * \frac{1}{1200}$
Fréquence accumulée	$\frac{7}{20}$	$\frac{14}{20}$	*1*

1. *Représenter rapidement les données. (1 pt)*
2. *Tracer rapidement la courbe cumulative. (1 pt)*
3. *Calculer les salaires moyens (1 pt) et médians (1,5 pt) (par la méthode de l'interpolation linéaire) ainsi que la variance (1 pt).*

Solution.

1. Dans le cas des données quantitatifs continues, on represente les donnès à l'aide d'un histogramme.
2. Tracer rapidement la courbe cumulative continue. (1 pt)
3. La moyenne empirique:

$$\overline{x} = \sum_i f_i c_i = \frac{7 * 1200 + 7 * 1600 + 6 * 2400}{20} = 1700.$$

La médiane est atteinte entre $[1400, 1800[$, et par interpolation linéaire

$$\frac{m - 1400}{0.5 - \frac{7}{20}} = \frac{1800 - 1400}{\frac{14}{20} - \frac{7}{20}},$$

donc $m = 1571,4$. La variance empirique:

$$V(x) = \overline{x^2} - \overline{x}^2 = \sum_i f_i c_i^2 - \overline{x}^2 = \frac{7 * 1200^2 + 7 * 1600^2 + 6 * 2400^2}{20} - 1700 = 238000.$$

□

Exercice 2. *Le personnel d'un très grand hôpital est réparti en trois catégories: les médecins, les soignants et le personnel AT (admnistratif ou technique). 12 % des personneles sont des médecins et 71 % sont des soignants. 67 % des médecins sont des hommes et 92 % des soignants sont des femmes. On interroge au hasard un membre du personnel de cet hôpital. (1pt pour l'arbre)*

1. *Quelle est la propabilité d'interroger une femme soignante? (0.5 pt)*
2. *Quelle est la propabilité d'interroger une femme médecin? (0.5 pt)*
3. *On sait que 80 % du personnel est féminin. Calculer la propabilité d'interroger une femme AT (0.5 pt). En déduire la propabilité d'interroger une femme sachant que la personne interrogée fait partie du personnel AT (0.5 pt), puis la probabilité d'interroger un médecin sachant que la personne interrogée est une femme (0.5 pt).*

Solution. Notons M: "le personnel interrogé est un médecin", S: "le personnel interrogé est un soignant", AT: "le personnel interrogé est un personnel AT", et F: "le personnel interrogé est une femme".

1. La probabilité d'interroger une femme soignante:

$$P(F \cap S) = P(S) \times P_S(F) = 0.71 \times 0.92 = 0.6532.$$

2. La probabilité d'interroger une femme médécin:

$$P(F \cap M) = P(M) \times P_M(F) = 0.12 \times 0.33 = 0.0396.$$

3. La probabilité d'interroger une femme AT:

$$0.8 = P(F) = P(F \cap AT) + P(F \cap \overline{AT}),$$

or, $P(F \cap \overline{AT}) = P(F \cap S) + P(F \cap M)$. Donc,

$$P(F \cap AT) = 0.8 - 0.6532 - 0.0396 = 0.1072.$$

En utilisant la formule de Bayes, on déduit la propabilité d'interroger une femme sachant que la personne interrogée fait partie du personnel AT:

$$P_{AT}(F) = \frac{P(AT \cap F)}{P(AT)} = \frac{0.1072}{0.17} = 0.6305.$$

ainsi, la propabilité d'interroger un médecin sachant que la personne interrogée est une femme:

$$P_F(M) = \frac{P(M) \times P_M(F)}{P(F)} = \frac{0.12 \times 0.33}{0.8} = 0.0495.$$

□

Exercice 3. *On lance un dé équilibré. Quelle est la probabilité d'obtenir:*

1. *un résulat pair? (0.5 pt)*
2. *un résulat strictement inférieur à 3? (0.5 pt)*
3. *un résultat pair ou strictement inférieur à 3? (0.5 pt)*

On lance trois fois de suite un dé équilibré. Quelle est la propbabilité d'obtenir:

1. *Trois résultats impairs? (0.5 pt + 0.5 pt pour avoir mentionner l'indépendance)*
2. *Au moins un résultat pair? (0.5 pt)*
3. *exactement un résultat pair? (1 pt)*

Solution. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

1. La probabilité d'obtenir un résulat pair est de $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
2. La probabilité d'obtenir un résulat strictement inférieur à 3: $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
3. La probabilité d'obtenir un résultat pair ou strictement inférieur à 3, donc $\{1, 2, 4, 6\}$: $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Notons I_i l'evenement d'obtenir un résultat impair lors du i-ème lancement.

1. La probabilité d'obtenir trois résultats impairs:
$$P(I_1 \cap I_2 \cap I_3) = P(I_1) \times P(I_2) \times P(I_3) = \frac{1}{8}. \tag{1}$$
2. La probabilité d'obtenir au moins un résultat pair:
$$P(\overline{I_1 \cap I_2 \cap I_3}) = 1 - P(I_1 \cap I_2 \cap I_3) = \frac{7}{8}. \tag{2}$$
3. La probabilité d'obtenir exactement un résultat pair: donc soit $\overline{I_1} \cap I_2 \cap I_3$ ou $I_1 \cap \overline{I_2} \cap I_3$ ou $I_1 \cap I_2 \cap \overline{I_3}$, et les trois évenement sont équiprobables de probabilité $\frac{1}{8}$. Donc la probabilité d'obtenir exactement un résultat pair est égale à $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$.

□

Exercice 4. *Alexandre a onze amis très proches. Il veut en inviter cinq à dîner.*

1. *Combien de groupes différents d'invités existe-t-il?*
2. *Parmi ses onze amis figurent Olivier et FAtour qui vivent en couple. Alexandre se dit finalement qu'il ne peut pas inviter l'un sans l'autre. Combien de possibilités a-t-il?*
3. *Natacha fait aussi parti des onze amis. Alexandre apprend qu'elle s'est disputée avec Fatou et qu'elles ne veulent plus se voir. Combien a-t-il de possibilités désormais?*

Solution.

1. C_{11}^5.

2. Il y a C_9^5 de groupes possibles en excluant le couple et C_9^3 de groupes possibles en invitant le groupe. Donc, il y'a $C_9^5 + C_9^3$ de groupes possibles au total.

3. Soit ni natacha ni le couple est invité, pour cela il y'a C_8^5 de groupes possibles, ou soit Natasha est invitée donc C_8^4 de groupes possibles, et dernier cas le couple est invité donc C_8^3 de groupes possibles. Au total, $C_8^5+C_8^4+C_8^3$ de groupes possibles. (Une autre facon de l'ecrire: $C_9^5 + C_8^3$)

$\square$

Exercice 5. *Calculer les sommes suivantes:*

1. $\sum_{k=3}^{n} k$ *(1pt)*
2. $\sum_{k=1}^{n}(2k+5)$ *(1pt)*
3. $\sum_{k=3}^{n}(k^2+1)$ *(1pt)*

Solution.

1. $\sum_{k=3}^{n} k = 3+4+\cdots+n = \sum_{k=1}^{n} k - 1 - 2 = \frac{n(n+1)}{2} - 3.$
2. $\sum_{k=1}^{n}(2k+5) = \sum_{k=1}^{n} 2k + \sum_{k=1}^{n} 5 = 2\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 5 = n(n+1) + 5 \times n.$
3. $\sum_{k=3}^{n}(k^2+1) = \sum_{k=3}^{n} k^2 + \sum_{k=3}^{n} 1 = \sum_{k=1}^{n} k^2 - 1^2 - 2^2 + (n-3+1) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + n - 7.$

$\square$