L1 Economie/Gestion
Probabilités statistiques
Année 2023/2024

Cours Luc Joseph
TD Zineb Ramiche

Exercice 1. *Une entreprise poss'de deux filiales. On appelle x le salaure net mensuel en centaine d'euros. On dispose des informations suivantes*

	effectif	*moyenne de x*	*écart-type de x*
Première filiale	100	25	2
Deuxième filiale	150	15	4

1. *Commenter rapidement ces statistiques.*

2. *Quelle est le salaire moyen de l'ensemble des employés?*

3. *Calculer la variance intra-population.*

4. *Calculer la variance inter-population et la variance totale. Commenter les résultats obtenus.*

Solution.

1. Nous avons deux groupes des employés (populations), avec des moyennes et des écarts-types différents. On voit bien que le premier groupe d'employés a un salaire moyen plus élevé et un écart-type plus faible par rapport au second groupe. On peut en déduire que les employés du premier groupe ont un salaire plus homogène par rapport au second groupe.

2. La salaire moyen de l'ensemble des employés:

$$\overline{x} = \frac{100\times\overline{x}_1+150\times\overline{x}_2}{100+150} = 19.$$

3. La variance intra-population:

$$V_{inter}(x) = \frac{100\times\sigma^2(x_1)+150\times\sigma^2(x_2)}{100+150} = 3.2.$$

4. La variance inter-population:

$$V_{intra}(x) = \frac{100\times\overline{x}_1^2+150\times\overline{x}_2^2}{100+150} = 24.$$

La variance totale:

$$V(x) = V_{inter}(x) + V_{intra}(x) = 3.2 + 24 = 27.2.$$

La variance intra-population est bien plus grande que la variance inter-population, il est plus équitable de séparer les employés en deux groupes groupes.

$\square$

Exercice 2. *La loi conjointe du couple (X, Y) est donné par :*

$X \backslash Y$	0	1	2
-1	0.2	0.2	0.2
2	0.2	0	0.2

1. *Donner les lois marginales de X et de Y, ainsi que leurs espérances.*
2. *X et Y sont-elles indépendantes?*
3. *Calculer la variance de X.*
4. *Calculer la covariance de (X, Y).*

Solution.

1. La loi marginale de X: $\Omega_X = \{-1; 2\}$

$$\mathbb{P}(X = -1) = \mathbb{P}(X = -1|Y = 0) + \mathbb{P}(X = -1|Y = 1) + \mathbb{P}(X = -1|Y = 2) = 0.6.$$
$$\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(X = 2|Y = 0) + \mathbb{P}(X = 2|Y = 1) + \mathbb{P}(X = 2|Y = 2) = 0.4.$$

L'espèrance de X:

$$\mathbb{E}(X) = -1 \times \mathbb{P}(X = -1) + 2 \times \mathbb{P}(X = 2) = 0.2$$

La loi marginale de Y: $\Omega_Y = \{0; 1; 2\}$

$$\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(Y = 0|X = -1) + \mathbb{P}(Y = 0|X = 2) = 0.4.$$
$$\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(Y = 1|X = -1) + \mathbb{P}(Y = 1|X = 2) = 0.2.$$
$$\mathbb{P}(Y = 2) = \mathbb{P}(Y = 2|X = -1) + \mathbb{P}(Y = 2|X = 2) = 0.4.$$

L'espèrance de Y:

$$\mathbb{E}(Y) = 0 \times \mathbb{P}(Y = 0) + 1 \times \mathbb{P}(Y = 1) + 2 \times \mathbb{P}(Y = 2) = 1.$$

2. X et Y ne sont pas indépendantes, on peut remarquer que:

$$\mathbb{P}(X = 2) \times \mathbb{P}(Y = 1) = 0.08 \neq 0 = \mathbb{P}(X = 2, Y = 1)\ .$$

3. La variance de X:

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = ((-1)^2 \times 0.6 + 2^2 \times 0.4) - 0.2^2 = 2.16.$$

4. La covariance de (X, Y):

$$cov(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

L'espèrance de XY:

$$\mathbb{E}(XY) = -0.2 - 2 \times 0.2 + 2 \times 2 \times 0.2 = 0.2.$$

On en déduit:

$$cov(X, Y) = 0.2 - 0.2 \times 1 = 1.$$

□

Exercice 3. *Un sac contient* 4 *boules blanches et* 6 *boules rouges. On tire deux boules sans remise et on note* X *le nombre de boules blanches tirées.*

1. *Donner la loi de* X*, son espérance et sa variance.*
2. *On propose le jeu suivant: Il faut dépenserr* 3 *euros pour pouvoir jouer, et ensuite le joueur gagne* 5 *euros par boules blanches tirées. Est-il intéressant de jouer?*

Solution.

1. La loi de X:

x	0	1	2
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{5}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{15}$

L'espérance de X:

$$\mathbb{E}(X) = \tfrac{8}{15} + 2 \times \tfrac{2}{15} = \tfrac{4}{5}.$$

L'espérance de X^2:

$$\mathbb{E}(X^2) = \tfrac{8}{15} + 2^2 \times \tfrac{2}{15} = \tfrac{16}{15}.$$

La variance de X:

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \tfrac{32}{75}.$$

2. La variable $G = 5X - 3$ désigne le gain en euro du jeu. Par linéarité de l'espérance, on a:

$$\mathbb{E}(G) = 5\mathbb{E}(X) - 3 = 1.$$

L'espérance est strictement positive, on peut en déduire que en moyenne on peut etre gagnant sur ce jeu.

□

Exercice 4. *Si vous jouez* 100 *fois à pile ou face, quelle est l'espérance du nombre de parties gagnées? (à justifier soigneusement)*

Solution. Notons X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si la i-eme partie est gagnée et 0 sinon. On remarque que pour tout i, X_i suit la loi de Bernouilli de paramètre $\frac{1}{2}$.

Notons X la variable aléatoire indiquant le nombre de parties gagnées. On remarque que X suit la binomiale de paramètres $(100, \frac{1}{2})$. L'espèrance de X:

$$\mathbb{E}(X) = 100 \times \tfrac{1}{2} = 50.$$

□

Exercice 5. *Pour un tournoi, Garry doit disputer* 3 *parties d'échecs: les* 2 *premières en jouant avec les blancs et la troisième en jouant avec les noirs. Il estime qu'il a une chance sur* 2 *de gagner en jouant avec les noirs, et* 3 *chances sur* 4 *de gagner en jouant avec les blancs. Soit* X *le nombre de parties gagnées en tout. Trouver la loi de* X*, l'espérance et la variance.*

Solution. Notons Y le nombre de parties que Garry gagne avec les blancs. On a que Y suit la loi binomiale de paramètres $(2, \frac{3}{4})$.

Notons Z le nombre de parties que Garry gagne avec les noirs. On a que Z suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

On remarque qu'on a $X = Y + Z$. La loi de X (par indépendance):

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = 0) &= \mathbb{P}(Y = 0 | Z = 0) = \mathbb{P}(Y = 0) \times \mathbb{P}(Z = 0) = (\frac{1}{4})^2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{32}.\\
\mathbb{P}(X = 1) &= \mathbb{P}(Y = 1 | Z = 0) + \mathbb{P}(Y = 0 | Z = 1)\\
&= \mathbb{P}(Y = 1) \times \mathbb{P}(Z = 0) + \mathbb{P}(Y = 0) \times \mathbb{P}(Z = 1)\\
&= (\frac{1}{4})^2 \times \frac{1}{2} + 2 \times 3(\frac{1}{4})^2 \times \frac{1}{2} = \frac{7}{32}.\\
\mathbb{P}(X = 2) &= \mathbb{P}(Y = 2 | Z = 0) + \mathbb{P}(Y = 1 | Z = 1)\\
&= \mathbb{P}(Y = 2) \times \mathbb{P}(Z = 0) + \mathbb{P}(Y = 1) \times \mathbb{P}(Z = 1)\\
&= (\frac{3}{4})^2 \times \frac{1}{2} + 2 \times 3(\frac{1}{4})^2 \times \frac{1}{2} = \frac{15}{32}.\\
\mathbb{P}(X = 3) &= \mathbb{P}(Y = 2 | Z = 1) = \mathbb{P}(Y = 2) \times \mathbb{P}(Z = 1) = (\frac{3}{4})^2 \times \frac{1}{2} = \frac{9}{32}.
\end{aligned}$$

L'espérance de X:

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(Z) = 2 \times \tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{2} = 2.$$

□