L2 Sciences Economiques
Mathématiques
Année 2023/2024

Cours Luc Joseph
TD Zineb Ramiche

Exercice 1. *Soit u la suite définie par:*

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n} \end{cases}$$

1. *Montrer que $0 \leq u_n \leq 1$.*
2. *Montrer que u est croissante.*
3. *En déduire que u est convergente et trouver sa limite.*

Solution.

1. Procédons par récurrence.

$$\mathcal{P}(n) : \ 0 \leq u_n \leq 1, \ \forall n \geq 0.$$

Initialisation: Pour $n = 0$, $u_0 = \frac{1}{2}$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité: Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, ie

$$\mathcal{P}(n) : \ 0 \leq u_n \leq 1.$$

Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, ie

$$\mathcal{P}(n+1) : \ 0 \leq u_{n+1} \leq 1.$$

On part du fait

$$\begin{aligned} 0 \leq u_n \leq 1 &\Leftrightarrow -1 \leq -u_n \leq 0 \\ &\Leftrightarrow 1 \leq 2 - u_n \leq 2 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2-u_n} \leq 1. \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion: On a montré $0 \leq u_n \leq 1$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{2-u_n} - u_n \\ &= \frac{1 - u_n(2-u_n)}{2-u_n} \\ &= \frac{u_n^2 - 2u_n + 1}{2-u_n} \\ &= \frac{(u_n-1)^2}{2-u_n} \end{aligned}$$

On déduit grâce à la dernière question qu'on $2 - u_n > 0$. D'où, $u_{n+1} - u_n > 0$ et on u_n est croissante.

3. La suite est croissante et majorée donc elle converge vers un point fixe de la fonction f definie par:

$$\begin{array}{rcccc} f & : & \mathbb{R}\ \{2\} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \frac{1}{2-x} \end{array}$$

Déterminons ensuite le point fixe de la fonction f:

$$\begin{aligned} f(x) = x &\Leftrightarrow \frac{1}{2-x} = x \\ &\Leftrightarrow x = 1. \end{aligned}$$

La suite u_n converge vers 1.

□

Exercice 2. *Soient* $P = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

et

$$\begin{array}{rcccc} f & : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & & (x,y,z) & \mapsto & (-2y+9z, x+3y-3z, 3z) \end{array}$$

1. *Montrer que P est inversible et en déduire que $u = (-2,1,0), v = (1,-1,0)$ et $w = (3,0,1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.*

2. *Montrer que* $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. *Calculer $f(u), f(v)$ et $f(w)$. En déduire que f est diagonalisable et écrire la matrice M de f dans la base canonique sous la forme QDQ^{-1} où Q est une matrice inversible et D une matrice diagonale.*

4. *Calculer M^n, où n est un entier quelconque.*

Solution.

1. Calculons le déterminant de P, $\det P = 1$, donc la matrice est inversible. On en déduit que $\{u, v, w\}$ forme une base.

2. Pour calculer P^{-1}, on résoud le système suivant:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

3. Calculons:
$$\begin{cases} f(u) = f(-2,1,0) = (-2,1,0) \\ f(v) = f(1,-1,0) = 2 \times (1,-1,0) \\ f(w) = f(3,0,1) = 3 \times (3,0,1) \end{cases}$$
On voit que les vecteurs u, v et w sont des vecteurs propres associés respectivement à $\{1,2,3\}$. Donc, f est diagonalisable, et on en déduit que $M = PDP^{-1}$ avec
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned} M^n &= PD^nP^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2-2^n & 2-2^{n+1} & 3(2^n-2)+3^{n+1} \\ 2^n-1 & 2^{n+1}-1 & 3(1-2^n) \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

Exercice 3. *Diagonaliser si c'est possible la matrice* $\begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Solution. Soit $P_A(X)$ le polynôme caractéristique de la matrice ci-dessus:
$$\begin{aligned} P_A(X) &= \begin{vmatrix} -5-X & 1 & 0 \\ -4 & -1-X & 0 \\ 0 & 0 & 1-X \end{vmatrix} \\ &= (1-X)(X+3)^2. \end{aligned}$$

Les valeurs propres sont donc $\{-3,1\}$.
Commencons par résoudre le système associé à -3.
$$AX = -3X \Leftrightarrow \begin{cases} -5x+y = -3x \\ -4x-y = -3y \\ z = -3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ z = 0 \end{cases}$$

Donc $E_{-3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ est de dimension 1 or la multiplicité de la valeur propre -3 est de 2.
On en déduit que la matrice n'est pas diagonalisable. □

Exercice 4. *Soit f la fonction définie par $f(x,y) = 3x^2 + 4y^2 - 2xy - 8x - 12y + 15$. Rechercher les (éventuels) points stationnaires de f et déterminer leurs natures.*

Solution. Commencons par calculer les dérivées partielles:

$$\begin{aligned}
\partial_x f(x,y) &= 6x - 2y - 8, \\
\partial_y f(x,y) &= 8y - 2x - 12, \\
\partial_{xx} f(x,y) &= 6, \\
\partial_{yy} f(x,y) &= 8, \\
\partial_{xy} f(x,y) &= -2.
\end{aligned}$$

Déterminons les points stationnaires:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_x f(x,y) = 0 \\ \partial_y f(x,y) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 6x - 2y - 8 = 0 \\ 8y - 2x - 12 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 2 \end{array} \right.$$

L'unique point stationnaire est $(2,2)$. Déterminons ensuite sa nature:

$$\begin{aligned}
D_f(2,2) &= \partial_{xx} f(2,2) \times \partial_{yy} f(2,2) - \partial_{xy} f(2,2)^2 \\
&= 44 > 0.
\end{aligned}$$

De plus, on a que $\partial_{xx} f(2,2) = 6 > 0$, donc le point $(2,2)$ est un minimun local. □