4 Valeurs Propres et Vecteurs Propres

Dans cette section, toutes les matrices considérées sont carrées.

4.1 Vocabulaire

Definition 4.1. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée de taille n, et λ un réel. On dit que λ est une valeur propre de la matrice A si il existe un vecteur $X \neq 0$ tel que, $AX = \lambda X$. On appelle X le vecteur propre associé à λ.*

Remarque :

1. Chaque matrice de carré de taille n peut avoir jusqu'à n valeurs propres distinctes.
2. Certaines matrices n'ont pas de valeurs propres.
3. Pour chaque valeur propre λ il existe une infinité de vecteurs propres.

Definition 4.2. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée de taille n, et X un vecteur. On dit que X est un vecteur propre de la matrice A si il existe un rée ; λ tel que, $AX = \lambda X$.*

Definition 4.3. *On appelle le polynôme caractéristique $\chi_A(X)$ d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est le déterminant de la matrice $A - XI_n$:*

$$\chi_A(X) = det(A - XI_n).$$

Exemple.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Le polynôme caractéristique de cette matrice est le suivant :

$$\begin{aligned} \det(A - XI_3) &= \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 2 \\ 2 & -1-X & 0 \\ 0 & 1 & 1-X \end{vmatrix} \\ &= (1-X) \cdot \begin{vmatrix} -1-X & 0 \\ 1 & 1-X \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & -1-X \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (1-X) \cdot (-1-X) \cdot (1-X) + 2. \end{aligned}$$

2. Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Le polynôme caractéristique de cette matrice est le suivant :

$$\begin{aligned} \det(B - XI_2) &= \begin{vmatrix} -X & 2 \\ 2 & 1-X \end{vmatrix} \\ &= -X \cdot (1-X) - 4 \end{aligned}$$

Definition 4.4. *Un polynôme $P(X)$ est scindé sur $\mathbb{R}$ s'il s'écrit sous forme d'un produit de polynômes de degré 1, i.e s'écrit sous la forme*

$$P(X) = (X - \lambda_1)^{m_{\lambda_1}} .. (X - \lambda_i)^{m_{\lambda_i}},$$

où les λ_i désigne les racines du polynôme et m_{λ_i} leurs multiplicités respectives.
Si $m_{\lambda_i} = 1$, on dit que λ_1 est une racine simple. Si $m_{\lambda_i} = 1$, on dit que λ_1 est une racine simple. Si $m_{\lambda_i} \geq 2$, on dit que λ_1 est une racine multiple.

Exemple.

1. Le polynôme $P(X) = (X - 1)(X - 2)$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.
2. Le polynôme $P(X) = (X - 1)^2$ est scindé sur $\mathbb{R}$ avec 1 comme une racine double.

Definition 4.5. *Soit λ une valeur propre de la matrice A. On appelle E_λ le sous-espace vectoriel propore l'ensemble de tous les vecteurs propres associés à λ :*

$$E_\lambda = \{X| \quad AX = \lambda X\} = Ker\ (A - \lambda \cdot I_n).$$

4.2 Diagonaliser une matrice

Theorem 4.1. *Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable s'il existe une matrice $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale et une matrice $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible tel que :*

$$A = S \cdot D \cdot S^{-1} \tag{1}$$

Theorem 4.2. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable alors :*

— *Les coefficients diagonaux de la matrice D sont les valeurs propres de A.*

— *Les colonnes de la matrice S sont les vecteurs propres de A, donnés dans le même ordre que les valeurs propres.*

Theorem 4.3. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, si le pôlynome caractéristique $\chi_A(X)$ est scindé à racines simples, alors la matrice A admet n valeurs propres distinctes, en particulier A est diagonalisable.*

Exemple.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.Le polynôme caractéristique $\chi_A(X)$ est donné par :

$$\begin{aligned}\chi_A(X) = \det(XI_3 - A) &= \begin{vmatrix} X-1 & -2 & 1 \\ 0 & X-3 & -1 \\ 2 & 1 & X-4 \end{vmatrix} \\ &= (X-1)\begin{vmatrix} X-3 & -1 \\ 1 & X-4 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & X-4 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 0 & X-3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (X-1)(X-2)(X-5).\end{aligned}$$

Le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$ et possède des racines simples 1, 2, et 5. Par conséquent, la matrice A a trois valeurs propres distinctes et est donc diagonalisable.

2. Soit $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Le polynôme caractéristique $\chi_A(X)$ est donné par :

$$\begin{aligned}\chi_B(X) = \det(XI_2 - B) &= \begin{vmatrix} X-3 & -1 \\ 0 & X-2 \end{vmatrix} \\ &= (X-3)(X-2).\end{aligned}$$

Le polynôme caractéristique est scindé et possède des racines simples 3 et 2. Par conséquent, la matrice A a 2 valeurs propres distinctes, et elle est donc diagonalisable.

Theorem 4.4. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La matrice A est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à n, ie*

$$dim\ E_{\lambda_1} + ..dim\ E_{\lambda_i} = n$$

.

Exemple. Diagonaliser la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique $\chi_A(X)$ est donné par :

$$\begin{aligned}\chi_A(X) = \det(A - X \cdot I_3) &= \begin{vmatrix} X & 3 & -1 \\ 2 & -1-X & 1 \\ 0 & 0 & 2-X \end{vmatrix} \\ &= -(2-X)^2(X+3).\end{aligned}$$

Le polynôme caractéristique est scindé avec deux racines, où $\lambda_1 = -3$ une racine simple et $\lambda_2 = 2$ une racine double. Déterminer les sous-espaces propores pour les valeurs propres :

1. Pour $\lambda_1 = -3$:

$$(A-(-3)I_3)\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}3 & 3 & -1\\2 & 2 & 1\\0 & 0 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}3x+3y-z=0\\2x+2y+z=0\\5z=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}3x=-3y\\2x=-2y\\z=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=-y\\z=0\end{cases}$$

Donc $u \in E_{-3} \Leftrightarrow u = x\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$. En particulier :

$$\dim E_{-3} = 1.$$

2. Pour $\lambda_2 = 2$:

$$(A-2I_3)\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-2 & 3 & -1\\2 & -3 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}-2x+3y-z=0\\2x-3y+z=0\\0=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}-2x+3y=z\end{cases}.$$

Donc $u \in E_2 \Leftrightarrow u = x\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$, $x, y \in \mathbb{R}$. En particulier :

$$\dim E_2 = 2.$$

On a bien $\dim E_{-3} + \dim E_2 = 3$, donc A est diagonalisable.
Digonaliser la matrice suivante :

$$B = \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

Le polynôme caractéristique $\chi_B(X)$ est donné par :

$$\chi_A(X) = \det(A - X\cdot I_3) = \begin{vmatrix}1-X & 0 & -1\\0 & 1-X & 2\\0 & 0 & 1-X\end{vmatrix}$$
$$= (1-X)^3.$$

Le polynôme caractéristique est scindé avec une seule racine, où $\lambda = 1$ de multiplicité égale à 3. Déterminer le sous-espace propore pour la valeur propre $\lambda = 1$:

$$(B-1\cdot I_3)\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\0 & 0 & 2\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}-z=0\\2z=0\\0=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow z = 0$$

Donc $u \in E_1 \Leftrightarrow u = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x, y \in \mathbb{R}$. En particulier :

$$\dim E_1 = 2 \neq 3.$$

Donc B n'est pas diagonalisable.

4.3 Méthodologie