L2 Sciences Economiques
Mathématiques
Année 2024/2025

Cours Luc Joseph
TD Zineb Ramiche

Exercice 1. *Diagonaliser si c'est possible les matrices suivantes :* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solution. Pour la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, le polynôme caractétistique associé à cette matrice :

$$\begin{aligned} \chi_A(X) &= \det(A - XI_2) \\ &= (X-1)(X-2). \end{aligned}$$

La matrice A admet deux valeurs propres distinctes $\{1, 2\}$, donc elle est diagonalisable.

Déterminons le vecteur propre associé à la valeur propre 1 :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\Rightarrow \begin{cases} x + y = x \\ 2y = y \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $u \in E_1 \Leftrightarrow u = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; x \in \mathbb{R}$.

Déterminons le vecteur propre associé à la valeur propre 2 :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\Rightarrow \begin{cases} x + y = 2x \\ 2y = 2y \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} x = y \\ y = y \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $v \in E_2 \Leftrightarrow v = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; x \in \mathbb{R}$.

Conclusion : La matrice A est diagonalisable, et il existe les matrices D et P tel que $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$, avec

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, le polynôme caractétistique associé à cette matrice :

$$\begin{aligned} \chi_B(X) &= \det(B - XI_2) \\ &= (X-1)^2. \end{aligned}$$

La matrice B admet une valeur propre double $\{1\}$. Si B est diagonalisable alors il existe les matrices D et P tel que $B = P \cdot D \cdot P^{-1}$, avec

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

Donc, $B = P \cdot D \cdot P^{-1} = P \cdot I_2 \cdot P^{-1} = I_2$. Or, $B \neq I_2$. Donc, la matrice B n'est pas diagonalisable. □

Exercice 2. *Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2$*

1. (a) Montrer que $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$.

(b) Dresser le tableau de variation de f, en précisant les limites aux bords.

(c) En déduire que $0 \leq x \leq \frac{1}{2} \Longrightarrow 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$.

(d) Trouver les extrema locaux et globaux de f.

(e) Résoudre l'équation $f(x) = x$.

(f) Représenter rapidement la courbe de la fonction f.

2. Soit u la suite définie par

$$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

(a) Représenter rapidement la suite u (on pourra utiliser le graphique de la question précédente).

(b) Montrer que pour tout n entier naturel on a : $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$.

(c) Etudier la monotonie de u.

(d) u est-elle convergente? Si oui, préciser sa limite.

(e) Reprendre les 2 questions précédentes quand $u_0 = 1$.

Solution.

1. (a) On a $f(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^3 + \frac{3}{2}(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{8} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

(b) On a $f'(x) = 3x^2 + 3x = 3x(x+1)$. Le tableau de variation de f:

x	-∞		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$	-∞	↗	$\frac{1}{2}$	↘	0	↗	$+\infty$

(c) D'après le tableau de variation, on en déduit que sur $[0, \frac{1}{2}]$ la fonction est croissante avec $f(0) = 0$ et $f(\frac{1}{2}) = {}^{1}2$. Donc, pour tout $0 \leq x \leq \frac{1}{2} \Longrightarrow 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$.

(d) La fonction f admet un maximun local en $x = -1$ et un minimu local en $x = 0$.

(e) On a :

$$\begin{aligned} f(x) &= x \\ x^3 + \frac{3}{2}x^2 &= x \\ x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x &= 0 \\ x(x^2 + \frac{3}{2}x^{-}1) &= 0 \\ x(x - \frac{1}{2})(x+2) &= 0 \end{aligned}$$

La fonction f admet trois points fixes $\left\{-2, 0, \frac{1}{2}\right\}$.

(f) Représenter rapidement la courbe de la fonction f.

2. Soit u la suite définie par

$$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

(a) Représenter rapidement la suite u (on pourra utiliser le graphique de la question précédente).

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$ par récurrence :

- Initialisation : Pour $n = 0$, $u_0 = \frac{1}{4}$. La propriété est vraie au rang 0
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{R}$, supposons que $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$, montrons $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$.
  On a :
  $$0 \leq u_n \leq \frac{1}{2},$$
  donc, d'après la question $1 - c$, on obtient :
  $$0 \leq f(u_n) \leq \frac{1}{2}.$$
  Comme, $u_{n+1} = f(u_n)$, on conclut :
  $$0 \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}.$$
- Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$.

(c) Etudions la monotonie de u :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= f(u_n) - u_n \\ &= u_n^3 + \frac{3}{2}u_n^2 - u_n \\ &= u_n(u_n - \frac{1}{2})(u_n + 2). \end{aligned}$$

Comme, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$, on a :

$$\begin{cases} u_n \geq 0, \\ u_n - \frac{1}{2} \leq 0, \\ u_n + 2 \geq 0. \end{cases}$$

Donc, $u_{n+1} - u_n \leq 0$. En particulier, la suite est décroissante.

(d) La suite u est décroissante et bornée donc elle converge vers l un point fixe de la fonction de f. Elle ne converge vers -2 car la suite est positive. Comme la suite est décroissante :

$$u_n \leq \frac{1}{4}.$$

Donc, la suite ne converge pas vers $\frac{1}{2}$, La suite u converge vers 0.

(e)
- On montre que pour tout n entier naturel, $u_n \geq 1$.
- On a :

$$u_{n+1} - u_n = u_n(u_n - \frac{1}{2})(u_n + 2).$$

On a :

$$\begin{cases} u_n \geq 1 \geq 0, \\ u_n - \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} \geq 0, \\ u_n + 2 \geq 3 \geq 0. \end{cases}$$

Donc, $u_{n+1} - u_n \geq 0$. En particulier, la suite est croissante.
- La suite u est croissante mais n'est pas majorée. Elle diverge alors vers $+\infty$.

□

Exercice 3. *Soient* $P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. *Montrer que P est inversible et en déduire que $u = (3,1)$ et $v = (2,1)$ forment une base b de $\mathbb{R}^2$.*

2. *Calculer P^{-1}.*

3. *Soit f l'application linéaire définie par*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\to (x - y; x + y) \end{aligned}$$

Écrire la matrice de f dans b.

Solution.

1. Calculons le déterminant de la matrice P :
$$\det(P) = 3 \cdot 1 - 1 \cdot 2 = 1.$$
Donc, la matrice P est inversible. En particulier, la famille $\{u, v\}$ forment une base de $\mathbb{R}^2$.

2. L'inverse de la matrice P :
$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Pour écrire la matrice f dans b, on utilise la formule suivante :
$$\mathcal{M}_b f = P^{-1} \cdot \mathcal{M}_c f \cdot P.$$
Avec, $P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, et :
$$\mathcal{M}_c f = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
. Donc,
$$\begin{aligned} \mathcal{M}_b f &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -6 & -5 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

Exercice 4. *1. Une matrice diagonalisable est-elle nécessairement inversible ?*

2. Une matrice inversible est-elle nécessairement diagonalisable ?
Si l'une ou l'autre (ou les 2) de ces propriétés est fausse, donner un contre exemple.

Solution.

1. Vrai. Soit A une matrice diagonalisable alors il existe les matrices D et P tel que $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$, avec
$$D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}.$$
On pose A^{-1} tel que $A^{-1} = P \cdot D' \cdot P^{-1}$, avec
$$D' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\beta} \end{pmatrix}.$$
On vérifie bien que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_2$. Donc, la matrice A est inversible.

2. Faux. Contre-exemple : la matrice B de l'exercice 1 est inversible mais elle n'est pas diagonalisable.

□