

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \setminus \{a\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{3x - 1}{2x + 4}. \end{aligned}$$

a) Pour quelle valeur du réel a la définition ci-dessus est elle bien posée ? *La fonction est bien définie quand le dénominateur est non nul*

$$2x + 4 \neq 0 \iff x \neq -2.$$

Ainsi, le domaine de définition de f est donné par

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}.$$

b) Soit $y \in \mathbb{R}$ fixé. Résoudre l'équation $y = \frac{3x - 1}{2x + 4}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$ selon les valeurs de y . *Soit $y \in \mathbb{R}$. Résolvons l'équation*

$$y = \frac{3x - 1}{2x + 4}.$$

On a :

$$\begin{aligned} y(2x + 4) &= 3x - 1 \\ 2xy + 4y &= 3x - 1 \\ (2y - 3)x &= -1 - 4y. \end{aligned}$$

Si $y \neq \frac{3}{2}$, alors

$$x = \frac{-1 - 4y}{2y - 3},$$

qui est une unique solution appartenant à $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Si $y = \frac{3}{2}$, l'équation devient

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} &= \frac{3x - 1}{2x + 4} \\ 6x + 12 &= 6x - 2 \\ 12 &= -2, \end{aligned}$$

ce qui est impossible.

- c) En déduire qu'il existe un réel b tel que $f : \mathbb{R} \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{b\}$ est bijective. D'après la question précédente, l'équation admet une unique solution pour tout $y \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$. Ainsi,

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}.$$

On en déduit que $f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$ est bijective.

- d) Déterminer la réciproque de la fonction $f : \mathbb{R} \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{b\}$. La fonction réciproque est donnée par :

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\} &\longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{-2\} \\ y &\longmapsto \frac{-1-4y}{2y-3}. \end{aligned}$$

2. Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \setminus \{a\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{2x+1}{3x+2}. \end{aligned}$$

- a) Pour quelle valeur du réel a la définition ci-dessus est elle bien posée ? La fonction est bien définie quand le dénominateur est non nul

$$3x+2 \neq 0 \iff x \neq -\frac{2}{3}.$$

Ainsi, le domaine de définition de f est donné par

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\}.$$

- b) Soit $y \in \mathbb{R}$ fixé. Résoudre l'équation $y = \frac{2x+1}{3x+2}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$ selon les valeurs de y . Soit $y \in \mathbb{R}$. Résolvons l'équation

$$y = \frac{2x+1}{3x+2}.$$

On a :

$$y(3x+2) = 2x+1$$

$$3xy+2y = 2x+1$$

$$(3y-2)x = 1-2y.$$

Si $y \neq \frac{2}{3}$, alors

$$x = \frac{1-2y}{3y-2},$$

qui est une unique solution appartenant à $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{3}\}$. Si $y = \frac{2}{3}$, l'équation devient

$$\frac{2}{3} = \frac{2x+1}{3x+2}$$

$$6x+4 = 6x+3$$

$$4 = 3,$$

ce qui est impossible.

- c) En déduire qu'il existe un réel b tel que $f : \mathbb{R} \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{b\}$ est bijective. D'après la question précédente, l'équation admet une unique solution pour tout $y \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\}$. Ainsi,

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\}.$$

On en déduit que $f : \mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{3}\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\}$ est bijective.

- d) Déterminer la réciproque de la fonction $f : \mathbb{R} \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{b\}$. La fonction réciproque est donnée par :

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\} &\longrightarrow \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\} \\ y &\longmapsto \frac{1-2y}{3y-2}. \end{aligned}$$