

Test 1 du mercredi 11 février 2026

Justifiez soigneusement vos réponses par des démonstrations. Durée du test : 30 minutes maximum. Documents et smartphones interdits.

Exercice 1.— Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ la suite des fonctions définies sur $[0, +\infty[$ par

$$f_n(x) = x e^{-nx^2}.$$

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers une fonction f que l'on précisera.
2. Montrer que la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$.

Exercice 2.— Pour tous $n \geq 0$, on définit les fonctions f_n sur $[0, +\infty[$ en posant

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1 + x^n}.$$

1. Montrer que $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur $[0, 1[$. On note alors S sa fonction somme : $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ définie sur $[0, 1[$.
2. a) Montrer que $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement sur $[0, r]$ pour tout $r \in]0, 1[$.
b) Montrer que S est continue sur $[0, 1[$.
3. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 1^-} S(x) = +\infty$. (On pourra minorer convenablement $S(x)$.)

Corrigé du Test 1

Corrigé de l'exercice 1.

1. Pour $x = 0$, on a $f_n(0) = 0$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(0) = 0$.

Pour $x > 0$, on a $0 < e^{-x} < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = x \lim_{n \rightarrow +\infty} (e^{-x^2})^n = 0$.

On en déduit que la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers la fonction f identiquement nulle.

2. On étudie les variations de f_n sur $[0, +\infty[$. On a $f'_n(x) = e^{-nx^2} (1 - 2nx^2)$. Comme $f'_n(x) > 0$ sur $[0, \frac{1}{\sqrt{2n}}[$ et $f'_n(x) < 0$ sur $]\frac{1}{\sqrt{2n}}, +\infty[$, on en déduit que f_n est croissante sur $[0, \frac{1}{\sqrt{2n}}]$ et décroissante sur $[\frac{1}{\sqrt{2n}}, +\infty[$. On a par ailleurs $f_n(x) \geq 0$. On déduit de tout cela que

$$\|f_n - f\|_{\infty, [0, +\infty[} = \sup_{x \in [0, +\infty[} |f_n(x) - f(x)| = \max_{x \in [0, +\infty[} f_n(x) = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2n}} e^{-1/2}.$$

On a finalement $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_{\infty, [0, +\infty[} = 0$ et donc la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$ vers la fonction f nulle.

Corrigé de l'exercice 2.

1. Pour tout $x \geq 0$, on a $1 + x^n \geq 1$ donc (*) : $0 \leq f_n(x) \leq x^n$. Si on fixe $x \in [0, 1[$, la série géométrique de terme général x^n est convergente. Par comparaison, la série de terme général positif $f_n(x)$ est convergente. La série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge donc simplement sur $[0, 1[$.
2. a) On fixe $r \in]0, 1[$. La même majoration (*) dit que

$$\forall x \in [0, r], \quad 0 \leq f_n(x) \leq x^n \leq r^n.$$

On a donc $\|f_n\|_{\infty, [0, r]} \leq r^n$. Comme la série géométrique $\sum_{n \geq 0} r^n$ converge, la série numérique $\sum_{n \geq 0} \|f_n\|_{\infty, [0, r]}$ converge et donc la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement sur $[0, r]$ pour tout $r \in]0, 1[$.

(Remarque : comme la fonction f_n est croissante en x (car $u \mapsto \frac{u}{1+u}$ est croissante sur $[0, +\infty[$ et $x \mapsto x^n$ est également croissante sur $[0, +\infty[$), on a même exactement $\|f_n\|_{\infty, [0, r]} = f_n(r) = \frac{r^n}{1+r^n}$ mais une majoration suffisait.)

b) Les fonctions f_n sont continues sur $[0, +\infty[$ et la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement sur $[0, r]$ pour $r \in]0, 1[$, on en déduit que S est continue sur $[0, r]$. Cette continuité étant vérifiée pour tout $r \in]0, 1[$, S est continue sur $[0, 1[$.

3. Pour tout $x \in [0, 1[$, on a $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n} \geq \frac{x^n}{2}$, donc

$$\forall x \in [0, 1[, \quad S(x) \geq \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{2(1-x)}$$

Comme le membre de droite tend vers $+\infty$ quand x tend vers 1^- , il en va de même pour le membre de gauche $S(x)$.