

NOM :

PRENOM:

GROUPE:

CONTRÔLE CONTINU - FÉVRIER 2026

TOUT DOCUMENT, TÉLÉPHONE OU CALCULATRICE EST RIGOREUSEMENT INTERDIT.
LA QUALITÉ DE RÉDACTION EST UN FACTEUR IMPORTANT DANS L'APPRÉCIATION DES
COPIES. VOUS ÊTES DONC INVITÉ-E-S À PRODUIRE DES RAISONNEMENTS CLAIRS,
COMPLETS ET CONCIS.

1. Exercice 1

1. Exprimer $\cos^2(x)$ en fonction de $\cos(2x)$. On utilise la formule de $\cos(a+b)$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1.$$

Donc

$$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}.$$

2. Calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx.$$

On pourra utiliser le changement de variable $x = \sin \theta$. Posons $x = \sin \theta$. Alors $dx = \cos \theta d\theta$ et

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 \theta} = \cos \theta.$$

Lorsque $x = -1$, $\theta = -\frac{\pi}{2}$ et lorsque $x = 1$, $\theta = \frac{\pi}{2}$. Donc

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta.$$

D'après la question précédente, on a

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}.$$

Ainsi

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 d\theta + \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2\theta) d\theta.$$

Or

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2\theta) d\theta = 0,$$

donc

$$I = \frac{1}{2} \times \pi = \frac{\pi}{2}.$$

3. *Bonus* : Donner une interprétation géométrique. *L'intégrale représente l'aire d'un demi-disque de rayon 1. L'aire d'un disque de rayon 1 vaut π , donc celle du demi-disque vaut $\frac{\pi}{2}$.*

2. Exercice 2

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \sum_{k=0}^n (k+1)^3 - k^3$ et $v_n = \sum_{k=0}^n k^2$.

1. Calculer u_n . *La somme est télescopique :*

$$u_n = (1^3 - 0^3) + (2^3 - 1^3) + \cdots + ((n+1)^3 - n^3).$$

Tous les termes intermédiaires s'annulent, donc

$$u_n = (n+1)^3.$$

2. En développant $(k+1)^3$, déduire que $v_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. *Développons :*

$$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1.$$

Donc

$$u_n = \sum_{k=0}^n (3k^2 + 3k + 1) = 3 \sum_{k=0}^n k^2 + 3 \sum_{k=0}^n k + \sum_{k=0}^n 1.$$

Or

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=0}^n 1 = n+1.$$

Comme $u_n = (n+1)^3$, on obtient :

$$(n+1)^3 = 3v_n + \frac{3n(n+1)}{2} + (n+1).$$

En simplifiant, on trouve :

$$v_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3. *Bonus*: Proposer une deuxième méthode. *On peut démontrer la formule par récurrence.*

3. Exercice 3

Calculer la limite si elle existe:

1. $u_n = \frac{n-4}{n^2+n-1}$ *On divise numérateur et dénominateur par n^2 :*

$$u_n = \frac{\frac{1}{n} - \frac{4}{n^2}}{1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}.$$

Quand $n \rightarrow \infty$, tout tend vers 0 au numérateur et vers 1 au dénominateur, donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

2. $u_n = \left(\frac{\sin(a + \frac{1}{n})}{\sin(a)} \right)^n$ *On utilise le développement limité :*

$$\sin\left(a + \frac{1}{n}\right) = \sin a + \frac{1}{n} \cos a + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Donc

$$\frac{\sin\left(a + \frac{1}{n}\right)}{\sin a} = 1 + \frac{\cot a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ainsi

$$u_n \longrightarrow e^{\cot a}.$$

3. $u_n = n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - n$ On utilise le développement :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Donc

$$n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = n - \frac{1}{2} + o(1).$$

Ainsi

$$u_n \rightarrow -\frac{1}{2}.$$