

1. a) En reconnaissant une forme composée, calculer

$$I = \int_0^{\pi/3} \sin(x) \cos^2(x) dx .$$

On remarque que la dérivée de $\cos x$ est $-\sin x$. On pose donc :

$$u = \cos x \quad \Rightarrow \quad du = -\sin x \, dx .$$

Alors

$$I = \int_0^{\pi/3} \sin x \cos^2 x \, dx = - \int_{\cos 0}^{\cos \frac{\pi}{3}} u^2 \, du .$$

Or

$$\cos 0 = 1 \quad \text{et} \quad \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} .$$

Donc

$$I = - \int_1^{\frac{1}{2}} u^2 \, du = \int_{\frac{1}{2}}^1 u^2 \, du .$$

Ainsi

$$I = \left[\frac{u^3}{3} \right]_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{24} = \frac{7}{24} .$$

b) En intégrant par parties, calculer

$$J = \int_1^e (\ln(x))^2 dx .$$

On effectue une intégration par parties

$$\begin{cases} u(x) = (\ln x)^2 & \Rightarrow u'(x) = \frac{2 \ln x}{x} \\ v'(x) = 1 & \Rightarrow v(x) = x \end{cases}$$

Donc

$$J = \left[x(\ln x)^2 \right]_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{2 \ln x}{x} dx .$$

On simplifie

$$J = \left[x(\ln x)^2 \right]_1^e - 2 \int_1^e \ln x \, dx .$$

Calculons d'abord le terme de bord

$$e(\ln e)^2 - 1(\ln 1)^2 = e .$$

Il reste à calculer $\int \ln x \, dx$, pour cela on refait une intégration par parties

$$\begin{cases} u(x) = \ln x & \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x} \\ v'(x) = 1 & \Rightarrow v(x) = x \end{cases}$$

Donc

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - x.$$

Ainsi

$$\int_1^e \ln x \, dx = [x \ln x - x]_1^e = (e - e) - (0 - 1) = 1.$$

Finalement

$$J = e - 2(1) = e - 2.$$

2. a) En reconnaissant une forme composée, calculer

$$I = \int_0^{\pi/4} \cos(x) \sin^2(x) \, dx.$$

On remarque que la dérivée de $\sin x$ est $\cos x$. On pose donc

$$u = \sin x \quad \Rightarrow \quad du = \cos x \, dx.$$

Alors

$$I = \int_0^{\pi/4} \cos x \sin^2 x \, dx = \int_0^{\sin \frac{\pi}{4}} u^2 \, du.$$

Or

$$\sin 0 = 0 \quad \text{et} \quad \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Donc

$$I = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} u^2 \, du.$$

On intègre

$$\int u^2 \, du = \frac{u^3}{3}.$$

Ainsi

$$I = \left[\frac{u^3}{3} \right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{12}.$$

b) En intégrant par parties, calculer

$$J = \int_0^1 x^2 e^x \, dx.$$

On effectue une intégration par parties

$$\begin{cases} u(x) = x^2 & \Rightarrow u'(x) = 2x \\ v'(x) = e^x & \Rightarrow v(x) = e^x \end{cases}$$

Donc

$$J = [x^2 e^x]_0^1 - 2 \int_0^1 x e^x dx.$$

Calculons le terme de bord

$$[x^2 e^x]_0^1 = e.$$

Il reste à calculer $\int_0^1 x e^x dx$, pour cela on fait une seconde intégration par parties

$$\begin{cases} u(x) = x & \Rightarrow u'(x) = 1 \\ v'(x) = e^x & \Rightarrow v(x) = e^x \end{cases}$$

Donc

$$\int_0^1 x e^x dx = [x e^x - e^x]_0^1 = (e - e) - (0 - 1) = 1.$$

Ainsi

$$\int_0^1 2x e^x dx = 2.$$

Finalement

$$J = e - 2.$$