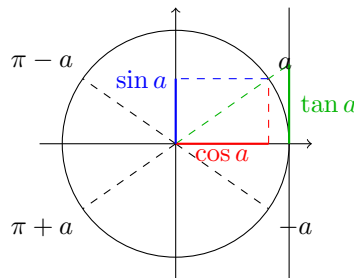


Fiche de trigonométrie

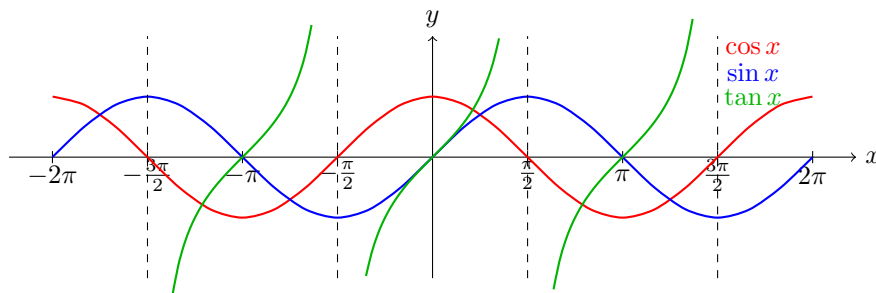
Fonctions circulaires

Définitions. Le cercle trigonométrique est un cercle particulièrement utile pour définir les angles ainsi que les fonctions trigonométriques. Il s'agit du cercle dont le rayon est égal à 1 centré sur l'origine du repère.



L'abscisse du repère correspond à $\cos(a)$ et son ordonnée correspond à $\sin(a)$.

$$\tan a = \frac{\sin a}{\cos a} \quad \cot a = \frac{1}{\tan a}$$



Cosinus et sinus d'angles particuliers.¹

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	non définie	0

2π -périodicité.

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x \quad \sin(x + 2k\pi) = \sin x \quad \tan(x + 2k\pi) = \tan x \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Formules d'Euler. Pour tout réel x :

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$$

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Formules élémentaires. Pour tout réel x :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \quad 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

1. $\pi = 180^\circ$, $\frac{\pi}{2} = 90^\circ$, $\frac{\pi}{3} = 60^\circ$, $\frac{\pi}{4} = 45^\circ$, $\frac{\pi}{6} = 30^\circ$

Formules de symétrie et de déphasage. Pour tout réel x :

$$\cos(-x) = \cos x \quad \sin(-x) = -\sin x \quad \tan(-x) = -\tan(x)$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x \quad \sin(\pi - x) = \sin x \quad \tan(\pi - x) = -\tan(x)$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos x \quad \sin(\pi + x) = -\sin x \quad \tan(\pi + x) = \tan(x)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan(x)}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{-1}{\tan(x)}$$

Formules d'addition. Pour tous réels a et b :

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \quad \sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \quad \sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

$$\tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)} \quad \tan(a - b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$$

Formules de linéarisation. Pour tout réel a :

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$\cos(2a) = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a \quad \sin(2a) = 2 \sin a \cos a$$

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos(2a)}{2} \quad \sin^2 a = \frac{1 - \cos(2a)}{2} \quad \tan(2a) = \frac{2 \tan(a)}{1 - \tan^2(a)}$$

Formules produit-somme et somme-produit. Pour tout réel a et b :

$$\cos(a) \cos(b) = \frac{\cos(a - b) + \cos(a + b)}{2} \quad \sin(a) \sin(b) = \frac{\cos(a - b) - \cos(a + b)}{2}$$

$$\sin(a) \cos(b) = \frac{\sin(a - b) + \sin(a + b)}{2}$$

$$\cos(a) + \cos(b) = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \quad \cos(a) - \cos(b) = -2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\sin(a) + \sin(b) = 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \quad \sin(a) - \sin(b) = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

Formules trigonométriques en fonction de l'angle moitié. Pour $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, on a :

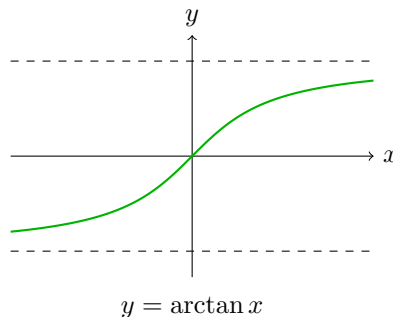
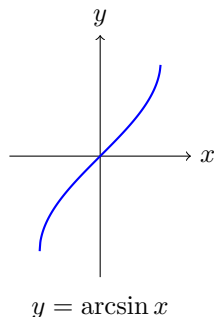
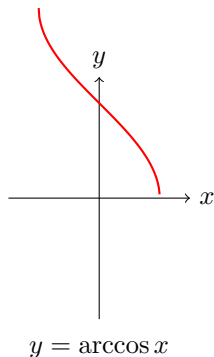
$$\cos(x) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad \sin(x) = \frac{2t}{1 + t^2} \quad \tan(x) = \frac{2t}{1 - t^2}$$

Fonctions trigonométriques réciproques.

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi] \quad y = \arccos(x) \iff x = \cos(y)$$

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad y = \arcsin(x) \iff x = \sin(y)$$

$$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\quad y = \arctan(x) \iff x = \tan(y)$$



Propriétés des fonctions trigonométriques réciproques.

$$\arccos(\cos(x)) = x, \quad \forall x \in [0, \pi] \quad \cos(\arccos(x)) = x, \quad \forall x \in [-1, 1]$$

$$\arcsin(\sin(x)) = x, \quad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \sin(\arcsin(x)) = x, \quad \forall x \in [-1, 1]$$

$$\arctan(\tan(x)) = x, \quad \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\quad \tan(\arctan(x)) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\arccos(0) = \frac{\pi}{2} \quad \arcsin(0) = 0 \quad \arctan(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \arctan(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \arctan(x) = -\infty$$

$$\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2} \quad \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$$

$$\arccos(x) + \arccos(-x) = \pi \quad \arcsin(x) + \arcsin(-x) = 0 \quad \arctan(x) + \arctan(-x) = 0$$

$$\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$$

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \forall x \in \mathbb{R}_+^* \\ -\frac{\pi}{2} & \forall x \in \mathbb{R}_-^* \end{cases}$$

Dérivées.

f	f'	$\mathcal{D}_{f'}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\tan(x)$	$1 + \tan^2(x)$	$\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$
$\arccos(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$] -1, 1[$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$] -1, 1[$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$

Équations trigonométriques.

$$\sin a = \sin b \iff \begin{cases} b = a + 2k\pi \text{ ou} \\ b = (\pi - a) + 2k\pi \end{cases}$$

$$\cos a = \cos b \iff \begin{cases} b = a + 2k\pi \text{ ou} \\ b = -a + 2k\pi \end{cases}$$

$$\tan a = \tan b \iff b = a + k\pi$$

Fonctions hyperboliques

Définitions. La fonction cosinus hyperbolique est la fonction $\text{ch} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

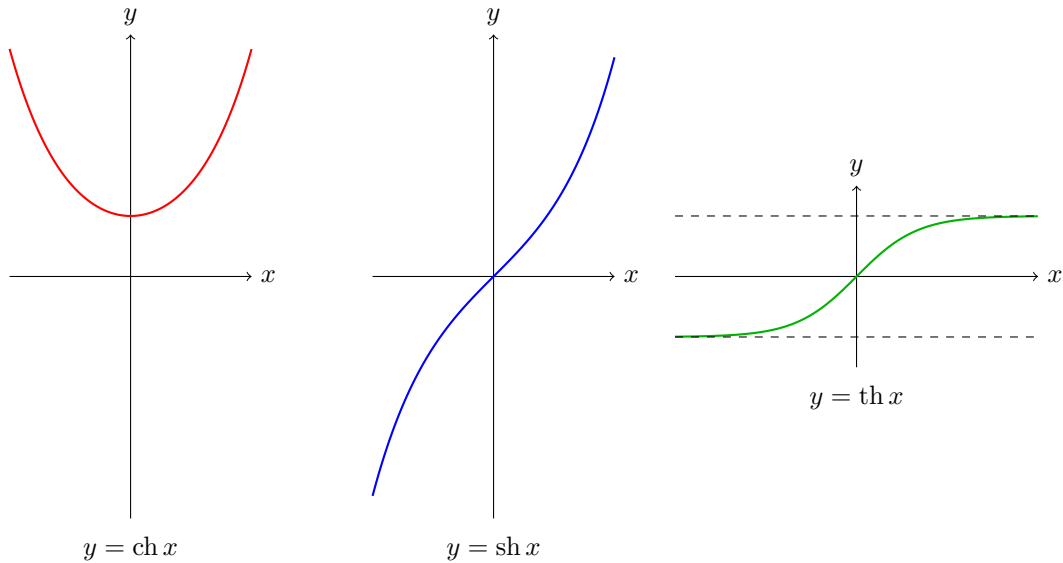
$$\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

La fonction sinus hyperbolique est la fonction $\text{sh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

La fonction tangente hyperbolique est la fonction $\text{th} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\text{th}(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$



Formules élémentaires. Pour tout réel x :

$$e^x = \text{ch}(x) + \text{sh}(x)$$

$$\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1 \quad 1 - \text{th}^2(x) = \frac{1}{\text{ch}^2(x)}$$

Formules d'addition. Pour tous réels a et b :

$$\text{ch}(a + b) = \text{ch}(a)\text{ch}(b) + \text{sh}(a)\text{sh}(b) \quad \text{sh}(a + b) = \text{sh}(a)\text{ch}(b) + \text{sh}(b)\text{ch}(a)$$

$$\text{ch}(a - b) = \text{ch}(a)\text{ch}(b) - \text{sh}(a)\text{sh}(b) \quad \text{sh}(a - b) = \text{sh}(a)\text{ch}(b) - \text{sh}(b)\text{ch}(a)$$

$$\text{th}(a + b) = \frac{\text{th}(a) + \text{th}(b)}{1 + \text{th}(a)\text{th}(b)} \quad \text{th}(a - b) = \frac{\text{th}(a) - \text{th}(b)}{1 - \text{th}(a)\text{th}(b)}$$

Formules de linéarisation. Pour tout réel a :

$$\text{ch}(2a) = \text{ch}^2 a + \text{sh}^2 a$$

$$\text{ch}(2a) = 2 \text{ch}^2(a) - 1 = 1 + 2 \text{sh}^2(a) \quad \text{sh}(2a) = 2 \text{sh}(a)\text{ch}(a) \quad \text{th}(2a) = \frac{2 \text{th}(a)}{1 + \text{th}^2(a)}$$

Formules produit-somme et somme-produit. Pour tout réel a et b :

$$\operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) = \frac{\operatorname{ch}(a-b) + \operatorname{ch}(a+b)}{2} \quad \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b) = \frac{\operatorname{ch}(a+b) - \operatorname{ch}(a-b)}{2}$$

$$\operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b) = \frac{\operatorname{sh}(a-b) + \operatorname{sh}(a+b)}{2}$$

$$\operatorname{ch}(a) + \operatorname{ch}(b) = 2 \operatorname{ch}\left(\frac{a+b}{2}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{a-b}{2}\right) \quad \operatorname{ch}(a) - \operatorname{ch}(b) = 2 \operatorname{sh}\left(\frac{a+b}{2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\operatorname{sh}(a) + \operatorname{sh}(b) = 2 \operatorname{sh}\left(\frac{a+b}{2}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{a-b}{2}\right) \quad \operatorname{sh}(a) - \operatorname{sh}(b) = 2 \operatorname{ch}\left(\frac{a+b}{2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

Fonctions hyperboliques réciproques. La fonction ch est une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[1, +\infty[$. Sa réciproque est appelée argument cosinus hyperbolique et est notée argch , et donnée explicitement par

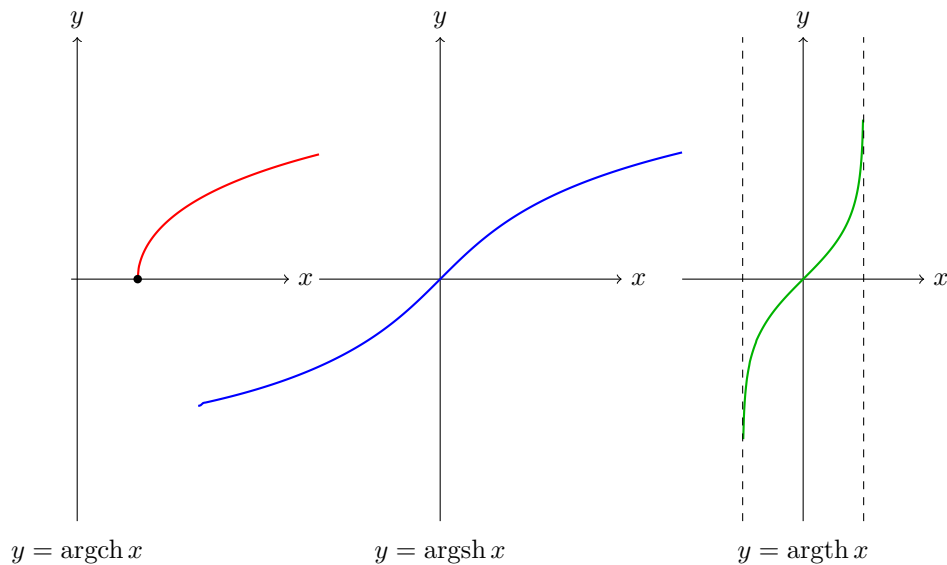
$$\operatorname{argch}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

La fonction sh est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Sa réciproque est appelée argument sinus hyperbolique et est notée argsh , et donnée explicitement par

$$\operatorname{argsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

La fonction th est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $] -1, 1[$. Sa réciproque est appelée argument tangente hyperbolique et est notée argth , et donnée explicitement par

$$\operatorname{argth}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$



Dérivées.

f	f'	$\mathcal{D}_{f'}$
$\operatorname{ch}(x)$	$\operatorname{sh}(x)$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{sh}(x)$	$\operatorname{ch}(x)$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{th}(x)$	$1 - \operatorname{th}^2(x)$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{argch}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$]1, +\infty[$
$\operatorname{argsh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{argth}(x)$	$\frac{1}{1-x^2}$	$] -1, 1[$