

Fiche de suites-séries de fonctions

Suites de fonctions.

Convergence simple. (f_n) converge simplement vers f sur I si :

$$\forall x \in I, \quad f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(x)$$

Autrement dit

$$\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists N(x, \varepsilon), \forall n \geq N, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Pour prouver la convergence simple :

1. Fixer $x \in I$
2. Étudier $f_n(x)$ comme suite numérique
3. Calculer la limite, notée $f(x)$
4. Conclure : $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f$ simplement sur I .

Convergence uniforme. (f_n) converge uniformément vers f sur I si :

$$\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

Autrement dit

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon), \forall n \geq N, \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Pour prouver la convergence uniforme :

1. Conjecturer f via la CV simple.
2. Poser $g_n(x) = |f_n(x) - f(x)|$.
3. Étudier $\sup_{x \in I} g_n(x)$
 - a- Calculer la dérivée de $g_n(x)$ et chercher le max
 - b- OU majorer $g_n(x) \leq a_n, \forall x \in I$
4. Montrer que ce $\sup \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in I} g_n(x) = 0$.
 - a- Direct
 - b- OU conclure avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$

Critère	CV simple	CV uniforme
N dépend de x	Oui	Non
Outil	Limite en x fixé	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup f_n - f = 0$
Continuité de la limite f	Non	Oui
Échange $\lim_{n \rightarrow +\infty} / \int$	Non	Oui
Échange $\lim_{n \rightarrow +\infty} / f'$	Non	Si f'_n cv unif.

Séries de fonctions

Sommes partielles.

$$S_N(x) = \sum_{n=0}^N f_n(x), \quad R_N(x) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} f_n(x)$$

Convergence simple d'une série. La série $\sum f_n$ converge simplement vers S sur I si :

$$\forall x \in I, \quad S_N(x) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} S(x)$$

On note $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$. Pour montrer la convergence simple :

1. Fixer $x \in I$
2. Étudier la série numérique $\sum_n f_n(x)$.
3. Si elle converge, sa somme est $S(x)$.

Convergence uniforme d'une série. La série $\sum f_n$ converge uniformément vers S sur I si :

$$\sup_{x \in I} R_N = \sup_{x \in I} |S_N(x) - S(x)| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

Pour prouver la convergence uniforme :

1. Majorer $\|R_N\|_\infty = \sup_{x \in I} |\sum_{n>N} f_n(x)|$.
2. Montrer $\|R_N\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

$$\text{La série } \sum f_n \text{ converge uniformément sur } I \implies \sup_{x \in I} |f_n(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\|f_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \implies \text{La série } \sum f_n \text{ ne converge pas uniformément sur } I$$

Séries alternées. Soit $a_n(x)$ une suite positive qui décroît vers 0 (en n), alors la série $\sum (-1)^n a_n(x)$ converge uniformément sur I . En particulier,

$$\|R_N\|_\infty \leq \|a_{N+1}\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Convergence normale d'une série. La série $\sum f_n$ converge normalement sur I si :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n(x)\|_\infty < +\infty$$

1. Étudier $\sup_{x \in I} f_n(x)$
 - a- Calculer la dérivée de $f_n(x)$ et chercher le max
 - b- OU majorer $f_n(x) \leq a_n, \forall x \in I$
2. Montrer que .
 - a- Conclure avec $\sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n(x)\|_\infty < +\infty$
 - b- OU conclure avec $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty$

$$\text{CN} \implies \text{CV uniforme} \implies \text{CV simple}$$

Type de CV	Caractérisation	Continuité de S	Intégrale	Dérivée S'	Outil clé
CVS	$\forall x, S_N(x) \rightarrow S(x)$	Non	Non	Non	Série numérique en x
CVU	$\ R_N\ _\infty \rightarrow 0$	Oui	Oui : $\int S = \sum \int f_n$	Si $\sum f'_n$ CVU	Majorer $\ R_N\ _\infty$
CVN	$\sum \ f_n\ _\infty < \infty$	Oui	Oui	Si $\sum \ f'_n\ _\infty < \infty$	Weierstrass