MATH 256 **Mathématiques S4**
Université Paris - Saclay **2025-2026**

Examen Partiel du 24 février 2026
Durée 2 heures
Les documents et calculatrices sont interdits.
L'utilisation de stylos effaçables ou « FriXion »est fortement déconséillée.
La note tiendra compte du soin de la rédaction, de la justification des calculs et des raisonnements.
Le bareme n'est qu'indicatif

1. Nombres complexes (7 pts)

(1) (3 pts)Soit $z = re^{i\theta}$. Donner le module et un argument pour les nombre suivants : $\bar{z}, \frac{1}{z}, z^4, iz, e^z$

(2) (a) (2 pts)Linéariser $\cos(t)^2 \sin(t)^2$ (i.e. l'exprimer en fonction de $\cos(kt), \sin(kt)$ pour $1 \leqslant k \leqslant 4$)

(b) (2 pts)En déduire les primitives de $\cos(t)^2 \sin(t)^2$

Solution :

(1) On pose $z = re^{i\theta}$ avec $r = |z| > 0$.
- $\bar{z} = re^{-i\theta}$: module r, argument $-\theta$.
- $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r}e^{-i\theta}$: module $\dfrac{1}{r}$, argument $-\theta$.
- $z^4 = r^4 e^{4i\theta}$: module r^4, argument 4θ.
- $iz = re^{i(\theta+\pi/2)}$ (car $i = e^{i\pi/2}$) : module r, argument $\theta + \dfrac{\pi}{2}$.
- $e^z = e^{r\cos\theta + ir\sin\theta} = e^{r\cos\theta}\, e^{ir\sin\theta}$: module $e^{r\cos\theta}$, argument $r\sin\theta$.

(2) (a) On utilise les formules d'Euler $\cos t = \dfrac{e^{it} + e^{-it}}{2}$ et $\sin t = \dfrac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$.

On remarque d'abord que :
$$\cos^2(t) = \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(e^{2it} + e^{-2it} + 2) = \frac{1}{2}(\cos(2t) + 1)$$
et
$$\sin^2(t) = \frac{-1}{4}(e^{2it} + e^{-2it} - 2) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2t))$$
donc :
$$\cos^2(t)\sin^2(t) = \frac{1}{4}(1 - \cos(2t))(\cos(2t) + 1) = \frac{1}{4}(1 - \cos(2t)^2) =$$
$$\frac{1}{4}(1 - \frac{1}{2}(\cos(4t) + 1)) = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos(4t)$$

(b) On intègre terme à terme :

$$\int \cos^2(t)\sin^2(t)\,dt = \int \left(\frac{1}{8} - \frac{\cos(4t)}{8}\right) dt = \frac{t}{8} - \frac{\sin(4t)}{32} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

2. Suites et limites (10 pts)

(1) Répondre par VRAI ou FAUX en justifiant (citer un théorème ou donner un contre-exemple)

(a) (1pt)Si $(|u_n|)_{n\geqslant 1}$ est une suite convergente alors la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente.

(b) (1pt)Si $a = \lim_n u_n$ alors $\lim_n u_n^2 = a^2$

(2) (2pt)Calculer la limite de $n^{1/n}$ lorsque n tend vers $+\infty$

(3) Soit $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ avec $u_0 = 0$

(a) (2pt)Montrer par récurrence que $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.

(b) (2pt)Montrer que la suite est croissante.

(c) (2pts) En déduire qu'elle converge et calculer sa limite.

Solution :

(1) (a) **FAUX.** Si $u_n = (-1)^n$, la suite $(|u_n|)_{n\geqslant 1}$ converge car elle est constante égale à 1, mais la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ diverge.

(b) **VRAI.** La fonction $x \mapsto x^2$ est continue, donc si $u_n \to a$ alors $u_n^2 \to a^2$ par continuité.

(2) On calcule $\lim_{n\to+\infty} n^{1/n}$. On pose $a_n = n^{1/n} = e^{\frac{\ln n}{n}}$. Comme $\dfrac{\ln n}{n} \to 0$ quand $n \to +\infty$ (croissance comparée), on obtient par continuité de l'exponentielle :

$$n^{1/n} = e^{\frac{\ln n}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^0 = 1.$$

(3) Soit $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$, $u_0 = 0$.

(a) On raisonne par récurrence :

- $u_0 = 0$, donc $0 \leqslant u_0 \leqslant 2$.

- Supposons $0 \leqslant u_n \leqslant 2$. Alors $2 \leqslant 2 + u_n \leqslant 4$, donc en prenant la racine carrée : $\sqrt{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$. En particulier $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.

Par récurrence, $0 \leqslant u_n \leqslant 2$ pour tout $n \geqslant 0$.

(b) La suite est croissante si $u_{n+1} \geqslant u_n$, i.e. $\sqrt{2 + u_n} \geqslant u_n$. Comme $u_n \geqslant 0$, cela équivaut à $2 + u_n \geqslant u_n^2$, soit $u_n^2 - u_n - 2 \leqslant 0$, soit $(u_n - 2)(u_n + 1) \leqslant 0$.

Puisque $u_n \geqslant 0 > -1$ et $u_n \leqslant 2$, on a bien $(u_n - 2) \leqslant 0$ et $(u_n + 1) \geqslant 0$, donc $(u_n - 2)(u_n + 1) \leqslant 0$. La suite est bien croissante.

(c) La suite (u_n) est croissante et majorée par 2, donc elle converge par le théorème des suites monotones bornées. Soit $\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n$.

En passant à la limite dans la relation $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$, on obtient $\ell = \sqrt{2 + \ell}$, soit $\ell^2 = 2 + \ell$, soit $\ell^2 - \ell - 2 = 0$, i.e. $(\ell - 2)(\ell + 1) = 0$.

Les solutions sont $\ell = 2$ ou $\ell = -1$. Comme $u_n \geqslant 0$ pour tout n, on a $\ell \geqslant 0$, donc $\ell = 2$.

3. Intégrales (15 pts)

(1) Répondre par VRAI ou FAUX en justifiant

   (a) (1pt)Si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge alors $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ et $\int_{-\infty}^{0} f(t)dt$ convergent

   (b) (1pt)Si f est continue sur $[0, +\infty[$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge alors la série $\sum_{k=0}^{+\infty} f(k)$ converge.

(2) Calculer les primitives suivantes

   (a) (2pt) $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+1}dx$

   (b) (2pt) $\displaystyle\int x^2 \ln(x)dx$ sur $]1, +\infty[$

   (c) (3 pts)Décomposer en éléments simples et calculer une primitive : $\displaystyle\int \frac{2x+1}{(x-1)(x+2)}\,dx$

(3) Étudier la convergence de chacune des intégrales impropres suivantes, en précisant où se situe(nt) le(s) point(s) à problème. Même en cas de convergence, on ne demande pas de calculer la valeur de l'intégrale.

   (a) (2pt) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-\cos(t)}{t^2}dt$

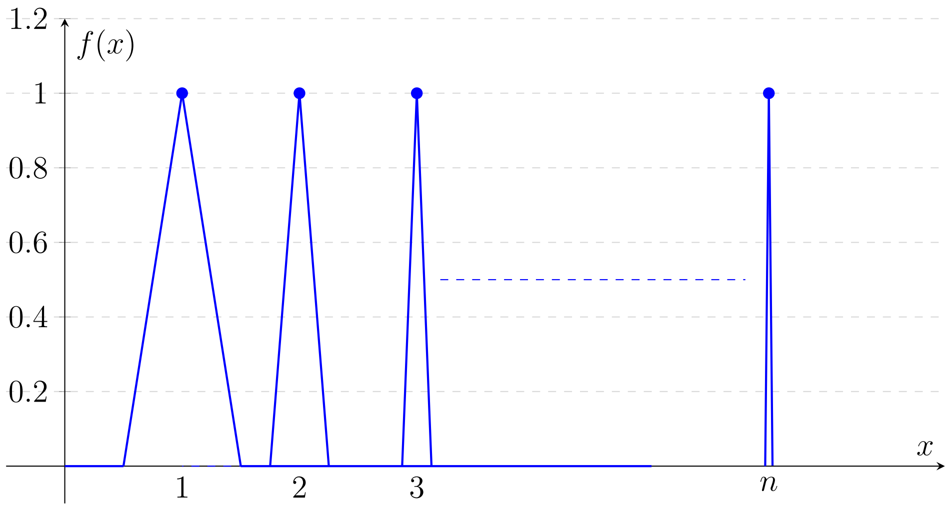
   (b) (2pt) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t^2}dt$ suivant la valeur de α

   (c) (2pt) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^2}{\sqrt{t^5+t^2+1}}dt$

Solution :

(1) (a) **VRAI.** Par définition, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ au sens de Riemann généralisé requiert la convergence *séparée* de $\int_{-\infty}^{0}$ et $\int_0^{+\infty}$.

   (b) **FAUX.**



Contre-exemple : pour la fonction ci-dessus on a vu en cours que l'intégrale converge, mais $f(n) = 1$ donc $\sum_k f(k)$ diverge. Le théorème du cours dit que c'est le cas si f est décroissante.

(2) (a) **Changement de variable** $u = x^2 + 1$, $du = 2x\,dx$:

$$\int x\sqrt{x^2+1}\,dx = \int \sqrt{u}\,\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}u^{3/2} + C = \frac{1}{3}(x^2+1)^{3/2} + C.$$

(b) **Intégration par parties** avec $u = \ln x$ et $v' = x^2$:

$$\int x^2 \ln x\,dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + C.$$

(c) **Décomposition en éléments simples.** On cherche A, B tels que :

$$\frac{2x+1}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}.$$

On trouve $A = 1, B = 1$.

Donc $\dfrac{2x+1}{(x-1)(x+2)} = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+2}$ et :

$$\int \frac{2x+1}{(x-1)(x+2)}\,dx = \ln|x-1| + \ln|x+2| + C.$$

(3) (a) **Point à problème :** $t = 0$. Au voisinage de 0, $1 - \cos t \sim \dfrac{t^2}{2}$, donc :

$$\frac{1-\cos t}{t^2} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{2}.$$

La fonction se prolonge par continuité en 0 (limite finie $\frac{1}{2}$), donc l'intégrale **converge**.

(b) **Points à problème :** $t = 0$ et $t = +\infty$.

En 0 : $\dfrac{t^\alpha}{1+t^2} \underset{t\to 0^+}{\sim} t^\alpha$. L'intégrale $\int_0^1 t^\alpha\,dt$ converge si et seulement si $\alpha > -1$.

En $+\infty$: $\dfrac{t^\alpha}{1+t^2} \underset{t\to+\infty}{\sim} t^{\alpha-2}$. L'intégrale $\int_1^{+\infty} t^{\alpha-2}\,dt$ converge si et seulement si $\alpha - 2 < -1$, i.e. $\alpha < 1$.

Conclusion : l'intégrale $\int_0^{+\infty} \dfrac{t^\alpha}{1+t^2}\,dt$ **converge si et seulement si** $-1 < \alpha < 1$.

(c) **Point à problème :** $t = +\infty$.

Au voisinage de $+\infty$: $t^5 + t^2 + 1 \sim t^5$, donc $\sqrt{t^5+t^2+1} \sim t^{5/2}$, et :

$$\frac{t^2}{\sqrt{t^5+t^2+1}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{t^2}{t^{5/2}} = t^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{t}}.$$

Comme $\int_1^{+\infty} t^{-1/2}\,dt$ diverge (exposant $-1/2 > -1$), l'intégrale **diverge**.

4. Séries numériques (10 pts)

(1) (1pt)Si u_n est le terme général d'une série convergente est-ce que nécessairement $\lim_n u_n = 0$?

(2) (2pts) Énoncer le théorème de convergence des séries alternées (théorème de Leibniz)

(3) (3 pts)Montrer que si $\lim_n(|u_n|)^{1/n} < 1$ la série converge (on demande une démonstration complète, pas de se contenter de citer la Règle de Cauchy)

Les séries dont le terme général est u_n sont elles convergentes ? absolument convergentes ? divergentes ? (on ne demande pas de calculer leur somme).

(1) (2pts) $u_n = 1 - \cos(\dfrac{1}{n})$.

(2) (2pts) $u_n = e^{1/n} - 1$

Solution :

(1) **Oui.** C'est la condition nécessaire de convergence : si $\sum u_n$ converge, alors $u_n \to 0$.

(2) **Théorème de Leibniz.** Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle telle que :
- (a_n) est à termes positifs ($a_n \geqslant 0$),
- (a_n) est décroissante ($a_{n+1} \leqslant a_n$),
- $a_n \to 0$.

Alors la série alternée $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n$ est convergente.

(3) **Démonstration.** Posons $\ell = \lim_n |u_n|^{1/n} < 1$. Choisissons r tel que $\ell < r < 1$. Par définition de la limite, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$:

$$|u_n|^{1/n} \leqslant r,$$

soit $|u_n| \leqslant r^n$. Or la série géométrique $\sum r^n$ converge (car $0 < r < 1$). Par le théorème de comparaison (critère de domination) pour les séries à termes positifs, $\sum |u_n|$ converge, donc $\sum u_n$ est **absolument convergente**, en particulier convergente.

Étude des séries :

(4) $u_n = 1 - \cos\left(\dfrac{1}{n}\right)$. Par développement limité, $1 - \cos(x) \sim \dfrac{x^2}{2}$ quand $x \to 0$, donc :

$$u_n = 1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}.$$

La série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann, exposant $2 > 1$), donc par comparaison $\sum u_n$ converge. De plus $u_n \geqslant 0$, donc la série est **absolument convergente**.

(5) $u_n = e^{1/n} - 1$. Par développement limité, $e^x - 1 \sim x$ quand $x \to 0$, donc :

$$u_n = e^{1/n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

La série $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge (série harmonique). Comme $u_n > 0$, la série $\sum u_n$ **diverge**.

FIN