I. a) Calculer l'intégrale
$$I = \int_0^{\pi/3} (\cos(x) + \sin(x))dx\,.$$
$$I = \int_0^{\pi/3} (\cos x + \sin x)\,dx$$
On intègre terme par terme
$$I = [\sin x - \cos x]_0^{\pi/3} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) - (0-1)$$
Ainsi
$$\boxed{I = \frac{\sqrt{3}+1}{2}}$$

b) Calculer l'intégrale
$$J = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx\,.$$
On remarque que
$$\frac{d}{dx}(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
Posons
$$u = \arcsin(x), \quad du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$
On calcule
$$\arcsin(0) = 0, \qquad \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}$$
L'intégrale devient
$$J = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} u\,du$$
Donc
$$J = \left[\frac{u^2}{2}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 - 0\right] = \frac{\pi^2}{32}$$
Ainsi
$$\boxed{J = \frac{\pi^2}{32}}$$

c) Calculer l'intégrale

$$K = \int_0^1 (x^2 + 3x + 1)e^x dx\,.$$

On pose

$$u(x) = x^2 + 3x + 1 \qquad v(x) = e^x$$

$$u'(x) = (2x + 3) \qquad v'(x) = e^x$$

Par IPP, on a

$$K = \Big[(x^2 + 3x + 1)e^x\Big]_0^1 - \int_0^1 (2x + 3)e^x\, dx$$

On refait une IPP sur la seconde intégrale

$$u(x) = 2x + 3 \qquad v(x) = e^x$$

$$u'(x) = 2 \qquad v'(x) = e^x$$

Donc

$$\int_0^1 (2x + 3)e^x\, dx = \Big[(2x + 3)e^x\Big]_0^1 - \int_0^1 2e^x\, dx$$

$$= \Big[(2x + 3)e^x\Big]_0^1 - 2\Big[e^x\Big]_0^1$$

On réinjecte et on obtient

$$K = \Big[(x^2 + 3x + 1)e^x\Big]_0^1 - \Big[(2x + 3)e^x\Big]_0^1 + 2\Big[e^x\Big]_0^1$$

$$K = (5e - 1) - (5e - 3) + 2(e - 1)$$

Ainsi

$$\boxed{K = 2e}$$

d) En intégrant par parties, montrer qu'il existe deux entiers ns $n, p \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$\int_0^1 \frac{2\ln(x + 2)}{3(x + 1)^2} dx = n\ \ln(2) - p\ \ln(3).$$

On pose

$$u(x) = \ln(x + 2) \qquad v(x) = -\frac{2}{3(x + 1)}$$

$$u'(x) = \frac{1}{x + 2} \qquad v'(x) = \frac{2}{3(x + 1)^2}$$

Donc

$$\int_0^1 \frac{2\ln(x + 2)}{3(x + 1)^2} dx = \Big[uv\Big]_0^1 - \int_0^1 u'v\, dx$$

$$\int_0^1 \frac{2\ln(x+2)}{3(x+1)^2}dx = \left[-\frac{2\ln(x+2)}{3(x+1)}\right]_0^1 + \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x+2)}\,dx$$

Calcul du terme de bord

$$\left[-\frac{2\ln(x+2)}{3(x+1)}\right]_0^1 = -\frac{\ln 3}{3} + \frac{2\ln 2}{3}$$

Pour l'intégrale restante, on remarque

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$$

Ainsi

$$\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x+2)}dx = \Big[\ln(x+1) - \ln(x+2)\Big]_0^1$$
$$= (\ln 2 - \ln 3) - (0 - \ln 2) = 2\ln 2 - \ln 3$$

Donc

$$\int_0^1 \frac{2\ln(x+2)}{3(x+1)^2}dx = -\frac{\ln 3}{3} + \frac{2\ln 2}{3} + \frac{2}{3}(2\ln 2 - \ln 3)$$
$$I = 2\ln 2 - \ln 3$$

Ainsi

$$\boxed{\int_0^1 \frac{2\ln(x+2)}{3(x+1)^2}dx = 2\ln(2) - \ln(3)}$$

II. On considère l'intégrale suivante

$$L = \int_0^3 \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx\,.$$

a) En le justifiant convenablement, effectuer le changement de variable $t = \sqrt{x}$. *On effectue le changement de variable*

$$t = \sqrt{x} \qquad x = t^2 \qquad dx = 2t\,dt$$

On calcule les bornes

$$x = 0 \Rightarrow t = 0$$
$$x = 3 \Rightarrow t = \sqrt{3}$$

Ainsi l'intégrale devient

$$L = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{t}{1+t^2}\,(2t\,dt) = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2t^2}{1+t^2}\,dt$$

b) En déduire la valeur de L. On pourra utiliser l'observation suivante:

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \quad \exists (\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3 \quad \forall t \in \mathbb{R} \qquad \frac{t^2+at+b}{t^2+1} = \alpha + \frac{\beta t+\gamma}{t^2+1}$$

On remarque

$$\frac{2t^2}{1+t^2} = 2 - \frac{2}{1+t^2}$$

Donc

$$L = \int_0^{\sqrt{3}} \left(2 - \frac{2}{1+t^2}\right) dt$$

$$L = 2\int_0^{\sqrt{3}} dt - 2\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+t^2} dt$$

$$L = 2[t]_0^{\sqrt{3}} - 2[\arctan(t)]_0^{\sqrt{3}}$$

$$L = 2\sqrt{3} - 2\left(\arctan(\sqrt{3}) - \arctan(0)\right)$$

Ainsi

$$\boxed{L = 2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}}$$

c) Calculer la limite

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{3}{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sqrt{k}}{n+3k}.$$

On remarque

$$\frac{\sqrt{k}}{n+3k} = \frac{\sqrt{k}}{n(1+3\frac{k}{n}}$$

Donc

$$\sqrt{\frac{3}{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sqrt{k}}{n+3k} = \sqrt{\frac{3}{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sqrt{k}}{n\left(1+\frac{3k}{n}\right)} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sqrt{3\frac{k}{n}}}{1+\frac{3k}{n}}$$

On pose $a = 0$, $b = 1$ et $f(x) = \frac{\sqrt{3x}}{1+3x}$. Ainsi,

$$\sqrt{\frac{3}{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sqrt{k}}{n+3k} = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(k + \frac{b-a}{n}).$$

On reconnaît une somme de Riemann sur $[0,1]$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{3}{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sqrt{k}}{n+3k} = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{3x}}{1+3x}\,dx$$

On pose

$$t = \sqrt{3x}, \qquad x = \frac{t^2}{3}, \qquad dx = \frac{2t}{3}dt$$

Ainsi

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{3x}}{1+3x}dx = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{t}{1+t^2}\cdot\frac{2t}{3}dt$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{t^2}{1+t^2}dt = \frac{2}{3}\int_0^{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt$$

$$= \frac{2}{3}\Big[t - \arctan(t)\Big]_0^{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)$$

Finalement

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{3}{n}}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sqrt{k}}{n+3k} = \frac{2}{3}\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)}$$

III. On considère la fonction g définie par

$$g : x \in]0, \frac{\pi}{2}] \to \frac{\cos(x)}{\sin(x)} + x$$

a) Montrer que g définit une bijection de $]0, \frac{\pi}{2}]$ sur un intervalle J à préciser. *La fonction g est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ comme somme de fonctions dérivables. Pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}]$*

$$g'(x) = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' + 1 = \frac{-\sin x\cdot\sin x - \cos x\cdot\cos x}{\sin^2 x} + 1 = \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x} + 1$$

Ainsi,

$$g'(x) = \frac{-1}{\sin^2 x} + 1.$$

Or pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}]$, on a $0 < \sin x \le 1$, donc $\sin^2 x \le 1$, ce qui donne $\dfrac{1}{\sin^2 x} \ge 1$, et donc :

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{\sin^2 x} \le 0.$$

g est strictement décroissante sur $]0, \frac{\pi}{2}]$. En 0^+ : $\cos x \to 1$ et $\sin x \to 0^+$, donc $\dfrac{\cos x}{\sin x} \to +\infty$, et $x \to 0$, d'où

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = +\infty,$$

et

$$g(\frac{\pi}{2}) = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

g est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ (comme somme de fonctions continues) et strictement monotone. Par le théorème de la bijection, g réalise une bijection de $]0, \frac{\pi}{2}]$ sur son image, qui est l'intervalle :

$$\boxed{J = \left[\frac{\pi}{2}, +\infty\right[}.$$

b) Calculer $g(\frac{\pi}{4})$. En déduire la valeur de $g^{-1}(1+\frac{\pi}{4})$. *On a*

$$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)} + \frac{\pi}{4} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{\pi}{4} = 1 + \frac{\pi}{4}.$$

Par définition de la bijection réciproque

$$g(x) = y \iff x = g^{-1}(y).$$

Or on vient de montrer que

$$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + \frac{\pi}{4},$$

donc

$$\boxed{g^{-1}\left(1 + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}.}$$

c) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $J/\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ et calculer $(g^{-1})'(1+\frac{\pi}{4})$. *D'après la question a), g est une bijection strictement décroissante et continue de* $]0, \frac{\pi}{2}]$ *sur* $J = [\frac{\pi}{2}, +\infty[$. *De plus, g est dérivable sur* $]0, \frac{\pi}{2}]$. *Le théorème de dérivabilité de la bijection réciproque s'applique :* g^{-1} *est dérivable en tout point* $y \in J$ *tel que* $g'(g^{-1}(y)) \neq 0$. *On a* $g'(x) = 0 \iff \sin^2 x = 1 \iff x = \frac{\pi}{2}$, *qui est le domaine* $J/\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$. *Cependant, on vérifie que* $g'(x) \to 0^-$ *lorsque* $x \to \frac{\pi}{2}^-$, *ce qui correspond à* $y \to \frac{\pi}{2}^+$, *i.e. au point* $\frac{\pi}{2}$ *dans J. En ce point, le théorème ne s'applique pas (la dérivée serait infinie). Ainsi,* g^{-1} *est dérivable sur* $J \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$, *et pour tout y dans cet ensemble*

$$(g^{-1})'(y) = \frac{1}{g'\left(g^{-1}(y)\right)}.$$

On a montré en b) que $g^{-1}\left(1+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$, *donc*

$$(g^{-1})'\left(1 + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{g'\left(\frac{\pi}{4}\right)}.$$

Or

$$g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)} = 1 - \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1 - \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1 - 2 = -1.$$

D'où

$$\boxed{(g^{-1})'\left(1 + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{-1} = -1.}$$

d) Étudier le comportement, lorsque $h \to 0^+$, de

$$\Delta(h) = \frac{g^{-1}(\frac{\pi}{2} + h) - g^{-1}(\frac{\pi}{2})}{h}.$$

Que peut-on déduire concernant g^{-1} ? *On cherche* $x_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ *tel que* $g(x_0) = \frac{\pi}{2}$. *On a*

$$g(x_0) = \frac{\pi}{2} \iff \frac{\cos x_0}{\sin x_0} + x_0 = \frac{\pi}{2} \iff \frac{\cos x_0}{\sin x_0} = \frac{\pi}{2} - x_0.$$

Or $\frac{\pi}{2}$ *est la borne inférieure de* $J = \left]\frac{\pi}{2}, +\infty\right[$ *. Elle n'est pas atteinte par g sur* $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ *(on a* $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} g(x) = \frac{\pi}{2}$ *sans que la limite soit atteinte). Ainsi* $\frac{\pi}{2} \notin J$*, et* $g^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ *n'est pas défini. On étudie donc*

$$\Delta(h) = \frac{g^{-1}\left(\frac{\pi}{2} + h\right) - \frac{\pi}{2}}{h}.$$

Posons $x = g^{-1}\left(\frac{\pi}{2} + h\right)$*, soit* $g(x) = \frac{\pi}{2} + h$*, i.e.* $h = g(x) - \frac{\pi}{2}$*. Alors*

$$\Delta(h) = \frac{x - \frac{\pi}{2}}{g(x) - \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\frac{g(x) - \frac{\pi}{2}}{x - \frac{\pi}{2}}}.$$

Posons $t = \frac{\pi}{2} - x \longrightarrow 0^+$*. On développe*

$$g(x) - \frac{\pi}{2} = \frac{\cos x}{\sin x} + x - \frac{\pi}{2} = \frac{\cos x}{\sin x} - t.$$

Or $\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t$ *et* $\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t$*, donc on écrit*

$$\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin t}{\cos t} = \tan t = t + \frac{t^3}{3} + o(t^3),$$

Ainsi

$$g(x) - \frac{\pi}{2} = \tan t - t = \frac{t^3}{3} + o(t^3) \sim \frac{t^3}{3}.$$

$$\Delta(h) = \frac{-t}{\frac{t^3}{3} + o(t^3)} = \frac{-t}{\frac{t^3}{3}(1 + o(1))} = \frac{-3}{t^2(1 + o(1))} \xrightarrow[t \to 0^+]{} -\infty.$$

$$\lim_{h \to 0^+} \Delta(h) = -\infty.$$

On en déduit que g^{-1} *n'est pas dérivable en* $\dfrac{\pi}{2}$ *, mais que la courbe représentative de* g^{-1} *admet une demi-tangente verticale à droite de* $y = \dfrac{\pi}{2}$*, avec une direction descendante (pente* $-\infty$*).*