# Un corrigé de l'examen partiel 2026

**Exercice 1**

Pour tout $n \geq 1$ entier et $x \in [0, +\infty[$, on pose

$$f_n(x) = n \arctan\left(\frac{x^2}{n}\right)$$

1. Pour tout $u$ réel, on a $1 - \dfrac{1}{1+u^2} = \dfrac{1+u^2-1}{1+u^2} = \dfrac{u^2}{1+u^2}$ et on a $0 \leq \dfrac{u^2}{1+u^2} \leq u^2$ en minorant le dénominateur par 1.

   On intègre alors cet encadrement entre 0 et $v$ réel $\geq 0$ et on obtient : $0 \leq v - \arctan(v) \leq \dfrac{v^3}{3}$.

2. En utilisant par exemple l'inégalité précédente, on remplace $v$ par $x^2/n$ et on obtient $0 \leq \dfrac{x^2}{n} - \arctan\left(\dfrac{x^2}{n}\right) \leq \dfrac{x^6}{3n^3}$. On multiplie tout par $n$ et il en résulte :

$$\forall n \geq 1, \forall x \geq 0, \quad 0 \leq x^2 - f_n(x) \leq \frac{x^6}{3n^2}.$$

   On en déduit que pour tout $x$ fixé $\geq 0$, grâce au théorème des gendarmes, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = x^2$. Donc la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers la fonction $f : x \mapsto x^2$.

3. Soit $a$ un réel $> 0$. La même inégalité montre que

$$\forall n \geq 1, \forall x \in [0, a], \quad 0 \leq x^2 - f_n(x) \leq \frac{a^6}{3n^2}.$$

   On a donc $\|f - f_n\|_{\infty,[0,a]} = \sup\limits_{x \in [0,a]} |f(x) - f_n(x)| \leq \dfrac{a^6}{3n^2}$. Cela entraine que $\lim\limits_{n \to +\infty} \|f - f_n\|_{\infty,[0,a]} = 0$ et la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ converge donc uniformément sur $[0, a]$ vers $f$.

4. On sait que la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément sur $[0, 1]$ vers $f$ d'après 3). On a donc, d'après le théorème de permutation limite-intégrale,

$$\begin{aligned} \lim_{n \to +\infty} \int_0^1 n \arctan\left(\frac{x^2}{n}\right) dx &= \int_0^1 \lim_{n \to +\infty} n \arctan\left(\frac{x^2}{n}\right) dx \\ &= \int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 x^2\, dx = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

**Exercice 2**

Pour tout $n \geq 1$ entier, on note $v_n$ la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par

$$v_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+x}}.$$

1. On peut écrire $v_n(x) = (-1)^{n-1} u_n(x)$ où $u_n(x) = \dfrac{1}{\sqrt{n+x}}$. Quand on fixe $x \geq 0$, on a $u_n(x) > 0$, la suite $(u_n(x))_{n\geq 1}$ est clairement décroissante (en $n$ !) et $u_n(x)$ tend vers 0 quand $n$ tend vers $+\infty$. Le critère des séries alternéees s'applique donc et la série $\sum_{n\geq 1} v_n(x)$ converge pour tout $x \geq 0$. Ainsi, la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.

2. Comme la fonction $u_n$ est décroissante en $x$ sur $[0, +\infty[$, on a

$$\sup_{x\in[0,+\infty[} |v_n(x)| = \sup_{x\in[0,+\infty[} u_n(x) = u_n(0) = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

La série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \|v_n\|_{\infty,[0,+\infty[} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ est divergente, donc la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} v_n$ ne converge pas normalement sur $[0, +\infty[$.

3. Pour étudier la convergence uniforme sur $[0, +\infty[$ de la série de fonctions (simplement convergente) $\sum_{n\geq 1} v_n$, on considère son reste d'ordre $n$, $R_n(x) = \sum_{k\geq n+1} v_k(x)$. On a en utilisant le bonus du critère des séries alternées :

$$\forall x \geq 0, \quad |R_n(x)| \leq |v_{n+1}(x)| = \frac{1}{\sqrt{n+1+x}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

On obtient $\|R_n\|_{\infty,[0,+\infty[} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ et donc $\lim_{n\to+\infty} \|R_n\|_{\infty,[0,+\infty[} = 0$ Ainsi, la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$.

**Exercice 3**

1. Les hypothèses faites en préambule ne sont pas utiles pour cette question. Elles seront utiles dans la deuxième question. Grâce à l'inégalité triangulaire, on peut écrire pour tout $n \geq 1$ :

$$\begin{aligned} |f_n(1/n) - f(0)| &= |f_n(1/n) - f(1/n) + f(1/n) - f(0)| \\ &\leq |f_n(1/n) - f(1/n)| + |f(1/n) - f(0)| \end{aligned}$$

Comme $1/n$ appartient à $[0, 1]$, on a pour tout $n \geq 1$ :

$$|f_n(1/n) - f(1/n)| \leq \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \|f_n - f\|_{\infty,[0,1]}$$

On en déduit :

$$(*) \qquad |f_n(1/n) - f(0)| \leq \|f_n - f\|_{\infty,[0,1]} + |f(1/n) - f(0)|$$

2. On a supposé que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers $f$ donc on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{\infty,[0,1]} = 0$.

   On a supposé également que la fonction $f$ est continue sur $[0,1]$. Elle est donc continue en 0 et on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(1/n) = f(0)$.

   On en déduit que le membre de droite dans l'inégalité $(*)$ tend vers 0 quand $n$ tend vers $+\infty$. Par comparaison, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |f_n(1/n) - f(0)| = 0$, c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(1/n) = f(0)$.

3. Si la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ convergeait uniformément sur $[0,1]$ vers $f = 0$, comme $f$ est continue sur $[0,1]$, on appliquerait la propriété obtenue à la question 2 qui dit que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(1/n) = f(0)$. Mais on calcule $f_n(1/n) = e^{-\ln^2(1+1/n)}$ qui tend vers $e^0 = 1$ quand $n$ tend vers $+\infty$. Ce qui est différent de $f(0) = 0$. La suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ ne converge donc pas uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction nulle.

**Exercice 4**

Pour tout $n \geq 1$ entier, on note $u_n$ la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par

$$u_n(x) = \frac{x}{x^2+n^2}.$$

1. Soit $x$ fixé dans $[0,+\infty[$. Pour tout $n \geq 1$, on a $0 \leq u_n(x) \leq \frac{x}{n^2}$. Comme la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge, on en déduit par comparaison que la série $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ converge. On a montré que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$.

   On peut donc définir la fonction $S : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ sur $[0,+\infty[$.

2. a) Soit $n \geq 1$. On a $u_n'(x) = \dfrac{1.(x^2+n^2) - x.(2x)}{(x^2+n^2)^2} = \dfrac{(n-x)(n+x)}{(x^2+n^2)^2}$. Il en résulte que $u_n'(x) \geq 0$ sur $[0,n]$ et $u_n'(x) \leq 0$ sur $[n,+\infty[$. La fonction $u_n$ est donc croissante sur $[0,n]$ et décroissante sur $[n,+\infty[$. On a $u_n(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n(x) = 0$, ce qui permet de compléter le tableau des variations de $u_n$.

   b) Il résulte du tableau des variations de $u_n$ que $\|u_n\|_{\infty,[0,+\infty[} = \sup\limits_{x\in[0,+\infty[} |u_n(x)| = u_n(n) = \dfrac{1}{2n}$. Comme la série numérique $\sum_{n\geq 1} \|u_n\|_{\infty,[0,+\infty[} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2n}$ diverge, il en résulte que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$ ne converge pas normalement sur $[0,+\infty[$.

3. a) Soit $A > 0$ fixé. En regardant le tableau de variation de $u_n$ établi plus haut, on voit que pour $n \geq A$, on a $u_n$ croissante sur $[0,A]$ et donc

$$\|u_n\|_{\infty,[0,A]} = \sup_{x\in[0,A]} |u_n(x)| = u_n(A) = \frac{A}{n^2+A^2} \leq \frac{A}{n^2}.$$

On en déduit que la série numérique $\sum_{n\geq A} \|u_n\|_{\infty,[0,A]}$ converge. Par ailleurs, si $n < A$, les $u_n$ étant continues sur $[0, A]$ , elles sont bornées sur $[0, A]$ (on sait même que dans ce cas, on a $\|u_n\|_{\infty,[0,A]} = \frac{1}{2n}$). La série numérique $\sum_{n\geq 1} \|u_n\|_{\infty,[0,A]} = \sum_{1\leq n<A} \|u_n\|_{\infty,[0,A]} + \sum_{n\geq A} \|u_n\|_{\infty,[0,A]}$ est donc convergente et donc la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge normalement sur $[0, A]$.

b) Soit $A$ quelconque fixé dans $]0, +\infty[$. Les $u_n$ sont continues sur $[0, A]$ et la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge normalement sur $[0, A]$. On en déduit que $S$ est continue sur $[0, A]$. Comme $S$ est continue sur tous les segments $[0, A]$, elle est continue sur $[0, +\infty[$.

4. Les $u_n$ sont $C^1$ sur $[0, +\infty[$ et $u_n'(x) = \dfrac{n^2 - x^2}{(n^2 + x^2)^2}$ (calculé en 1.) On a aussi

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad |u_n'(x)| = \frac{|n^2 - x^2|}{(n^2 + x^2)^2} \leq \frac{n^2 + x^2}{(n^2 + x^2)^2} = \frac{1}{n^2 + x^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Comme la série numérique des majorants $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge, la série des dérivées $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n'$ converge normalement (donc uniformément) sur $[0, +\infty[$. On en déduit que $S$ est $C^1$ sur $[0, +\infty[$.

5. Dans cette question, le réel $x$ est fixé dans $]0, +\infty[$.

a) On remarque que la fonction $f : t \mapsto \dfrac{x}{x^2 + t^2}$ est décroissante sur $[0, +\infty[$. On fixe $k \geq 1$. On a donc pour tout $t \in [k - 1, k] \subseteq [0, +\infty[$, $f(k) \leq f(t)$. On intègre cette inégalité entre $k - 1$ et $k$ et on obtient $f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)\, dt$. De même, pour tout $t \in [k, k + 1] \subseteq [0, +\infty[$, on a $f(t) \leq f(k)$. On intègre cette inégalité entre $k$ et $k + 1$ et on obtient $\int_k^{k+1} f(t)\, dt \leq f(k)$. On a bien établi l'encadrement

$$\int_k^{k+1} f(t)\, dt \leq f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)\, dt.$$

On somme ces inégalités pour $k$ allant de 1 à $n$ et on utilise la relation de Chasles pour obtenir

$$(1) \qquad \int_1^{n+1} f(t)\, dt \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \int_0^{n} f(t)\, dt.$$

b) Grâce au changement de variable $s = \frac{t}{x}$, on a

$$\int_0^n f(t)\, dt = \int_{t=0}^{t=n} \frac{x}{x^2} \frac{1}{1 + \left(\frac{t}{x}\right)^2}\, dt = \int_{s=0}^{s=\frac{n}{x}} \frac{1}{1 + s^2}\, ds = \arctan\left(\frac{n}{x}\right)$$

et $\int_1^{n+1} f(t)\, dt = \int_0^{n+1} f(t)\, dt - \int_0^1 f(t)\, dt = \arctan\left(\frac{n+1}{x}\right) - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$. L'encadrement (1) s'écrit donc

$$\arctan\left(\frac{n+1}{x}\right) - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \arctan\left(\frac{n}{x}\right)$$

et on fait tendre $n$ vers $+\infty$. On obtient

$$\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \leq S(x) \leq \frac{\pi}{2}.$$