Test 2 du mercredi 1er avril 2026

Justifiez soigneusement vos réponses par des démonstrations. Durée du test : 30 minutes maximum. Documents et smartphones interdits.

Exercice 1.— Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 e^{-x}$.

1. Montrer que la fonction f est lipschitzienne sur $[0, +\infty[$.
2. La fonction f est-elle uniformément continue sur $\mathbb{R}$? Justifier.

Exercice 2.— On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-xt}}{1+t}\,dt$.

1. a) Montrer que la fonction $F : x \mapsto F(x)$ est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
   b) Exprimer la dérivée $F'(x)$ sous la forme d'une intégrale à paramètre.
2. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$. (Indication : on encadrera judicieusement l'intégrande.)
3. (Hors barème) Montrer qu'en fait $\lim_{x\to+\infty} xF(x) = 1$.

Corrigé du test 2

Corrigé de l'exercice 1. sur 5 points Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 e^{-x}$.

1. On calcule la dérivée de f : $f'(x) = (2x - x^2)e^{-x}$. 0.5 point On a $f'(x) \sim_{x\to+\infty} -x^2 e^{-x}$. Par croissances comparées, on a $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$. La fonction dérivée f' est continue sur $[0, +\infty[$ et elle tend vers 0 en $+\infty$, f' est donc bornée en valeur absolue sur $[0, +\infty[$ par une certaine constante $M > 0$. On en déduit que f est lipschitzienne sur $[0, +\infty[$. f' bornée + conclusion : 2 points En effet, grâce à l'inégalité des accroissements finis Cet argument n'est pas attendu, on ne met pas de point, on a
$$\forall x, y \in [0, +\infty[, \qquad |f(x) - f(y)| \le \sup_{u\in\mathbb{R}} |f'(u)|\,|x - y| \le M|x - y|.$$

2. Il suffit de considérer les suites (x_n) et (y_n) définies par $x_n = -n$ et $y_n = -n - \frac{1}{n}$. On a $x_n - y_n = \frac{1}{n} \to 0$ quand $n \to +\infty$. Et pourtant, on a $f(y_n) - f(x_n) = (-n - \frac{1}{n})^2 e^{n+\frac{1}{n}} - n^2 e^n \ge (n^2 + 2 + \frac{1}{n^2})e^n - n^2 e^n \ge 2e^n \to +\infty$ quand $n \to +\infty$. En particulier, on n'a pas $\lim_{n\to+\infty} |f(x_n) - f(y_n)| = 0$. La fonction f n'est donc pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Choix des suites : 1 point ; $x_n - y_n \to 0$: 0.5 points ; $f(x_n) - f(y_n) \not\to 0$: 1 point

   Remarque : par contre, elle est uniformément continue sur $[0, +\infty[$ car elle est lipschitzienne sur $[0, +\infty[$.

Corrigé de l'exercice 2. sur 5 points On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-xt}}{1+t}\,dt$.

1. a) On note $f(x,t) = \dfrac{e^{-xt}}{1+t}$. 0.5 point La fonction $f : (x,t) \mapsto f(x,t) = \dfrac{e^{-xt}}{1+t}$ est continue sur $\mathbb{R} \times [0,1]$. 0.5 point **De plus**, on voit que f admet des dérivées partielles $\partial_x f$ en tout point (x,t) de $\mathbb{R} \times [0,1]$ et $\partial_x f(x,t) = \dfrac{-te^{-xt}}{1+t}$ 1 point.
La fonction $(x,t) \mapsto \partial_x f(x,t) = \dfrac{-te^{-xt}}{1+t}$ est continue sur $\mathbb{R} \times [0,1]$. 0.5 point
On en déduit grâce au théorème de dérivabilité des intégrales à paramètre que l'intégrale à paramètre F est une fonction bien définie sur $\mathbb{R}$ et est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

   b) De plus, la formule de Leibniz dit alors que 1 point
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = \int_0^1 \partial_x f(x,t)\,dt = \int_0^1 \frac{-te^{-xt}}{1+t}\,dt.$$

2. On commence par encadrer l'intégrande. Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,1]$, on a 0.5 point

$$0 \leq f(x,t) = \frac{e^{-xt}}{1+t} \leq e^{-xt}.$$

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $0 \leq F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-xt}}{1+t}\,dt \leq \int_0^1 e^{-xt}\,dt$.

Pour tout $x > 0$, on calcule l'intégrale de droite : $\displaystyle\int_0^1 e^{-xt}\,dt = \left[\frac{e^{-xt}}{-x}\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{1-e^{-x}}{x}$. Il en résulte l'encadrement 1 point

$$\forall x > 0, \quad 0 \leq F(x) \leq \frac{1-e^{-x}}{x}.$$

Grâce au théorème des gendarmes, on en déduit $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 0$.

3. (Hors barème) On écrit $xF(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{xe^{-xt}}{1+t}\,dt$. En regardant le numérateur dans l'intégrande, on a envie de faire une intégration par parties. Cela donne

$$xF(x) = \left[\frac{-e^{-xt}}{1+t}\right]_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 \frac{e^{-xt}}{(1+t)^2}\,dt = 1 - \frac{e^{-x}}{2} - \int_0^1 \frac{e^{-xt}}{(1+t)^2}\,dt.$$

On copie alors la méthode exposée à la question 2). On encadre l'intégrande $0 \leq \dfrac{e^{-xt}}{(1+t)^2} \leq e^{-xt}$ et on en déduit

$$0 \leq \int_0^1 \frac{e^{-xt}}{(1+t)^2}\,dt \leq \int_0^1 e^{-xt}\,dt = \frac{1-e^{-x}}{x}.$$

On en déduit grâce au théorème des gendarmes que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_0^1 \frac{e^{-xt}}{(1+t)^2}\,dt = 0$ et donc

$$\lim_{x \to +\infty} xF(x) = 1 - \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-x}}{2} - \lim_{x \to +\infty} \int_0^1 \frac{e^{-xt}}{(1+t)^2}\,dt = 1.$$

Si c'est fait correctement 1 point de bonus, s'il y a utilisation d'une convergence dominée (pas vue en cours !) 0.5 point pour valider que $\int_0^x \frac{e^{-u}}{1+u/x}\,du$ tend vers $\int_0^{+\infty} e^{-u}\,du = 1$, sinon 0 point. Prévenir les étudiants de ne pas se presser pour faire ce bonus qui rapporte très peu.