

NOM :

PRENOM:

GROUPE:

CONTRÔLE CONTINU - AVRIL 2026

TOUT DOCUMENT, TÉLÉPHONE OU CALCULATRICE EST RIGOREUSEMENT INTERDIT.  
LA QUALITÉ DE RÉDACTION EST UN FACTEUR IMPORTANT D'APPRÉCIATION DES  
COPIES. VOUS ÊTES DONC INVITÉS À PRODUIRE DES RAISONNEMENTS CLAIRS,  
COMPLETS ET CONCIS.

Le barème est donné à titre d'information, et pourra être modifié durant la correction.

1. Partie 1

---

On considère la série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2}$  sur  $[0, +\infty[$

1. (2pts) Montrer que la série converge normalement sur  $[0, +\infty[$ . *Pour tout  $x \geq 0$ , on a*

$$0 \leq \frac{e^{-nx}}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

*Or la série numérique  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$  converge (série de Riemann de paramètre  $2 > 1$ ). Par le critère de comparaison uniforme (critère de Weierstrass), la série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2}$$

*converge normalement sur  $[0, +\infty[$ .*

2. (2pts) En déduire que la somme  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2}$  est continue sur  $[0, +\infty[$ . *Chaque fonction  $x \mapsto \frac{e^{-nx}}{n^2}$  est continue sur  $[0, +\infty[$ . Comme la série converge normalement, elle converge uniformément. La limite uniforme d'une suite de fonctions continues étant continue, la somme*

$$x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2}$$

*est continue sur  $[0, +\infty[$ .*

3. (3pts) Peut-on dériver la série terme à terme ? Justifier en faisant attention au point  $x = 0$ . *On dérive terme à terme :*

$$\left( \frac{e^{-nx}}{n^2} \right)' = -\frac{ne^{-nx}}{n^2} = -\frac{e^{-nx}}{n}.$$

On considère donc la série dérivée :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{e^{-nx}}{n}.$$

Sur  $[a, +\infty[$  avec  $a > 0$  : Pour  $x \geq a > 0$ , on a

$$0 \leq \frac{e^{-nx}}{n} \leq \frac{e^{-na}}{n}.$$

Or la série  $\sum \frac{e^{-na}}{n}$  converge (comparaison avec une série géométrique). Donc la série dérivée converge normalement sur tout intervalle  $[a, +\infty[$ . Ainsi, la série initiale est dérivable terme à terme sur  $]0, +\infty[$ , et

$$\frac{d}{dx} \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2} \right) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n}.$$

Au point  $x = 0$  : La série dérivée devient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n},$$

qui diverge. Donc la série dérivée ne converge pas en  $x = 0$ , et on ne peut pas dériver terme à terme en ce point. Conclusion : la série est dérivable terme à terme sur  $]0, +\infty[$ , mais pas en  $x = 0$ .

## 2. Partie 2

On considère la fonction  $2\pi$ -périodique qui vaut 1 si  $x \in [-\pi/2, \pi/2]$  et 0 si  $x \in [-\pi, -\pi/2[ \cup ]\pi/2, \pi]$ .

- (2 point) Tracer la fonction sur les 3 périodes  $[-3\pi, 3\pi]$ ,
- ( $a_0$ : 2 point,  $b_n$ : 2 points). Trouver les coefficients de Fourier réels  $a_0$  et  $b_n$  de  $f(x)$ . La fonction est paire, donc  $b_n = 0$  pour tout  $n \geq 1$ .

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 dx = \frac{1}{\pi} \cdot \pi = 1.$$

- (4 points). Montrer que si  $n$  pair,  $a_n$  est 0, et si  $n = 2p + 1$  est impair, on a

$$a_{2p+1} = \frac{2(-1)^p}{\pi(2p+1)}.$$

Pour  $n \geq 1$ ,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(nx) dx.$$

Donc

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\sin(nx)}{n} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{2 \sin(n\pi/2)}{n}.$$

Ainsi

$$a_n = \frac{2 \sin(n\pi/2)}{\pi n}.$$

Si  $n = 2p$ , alors  $\sin(n\pi/2) = \sin(p\pi) = 0$ , donc

$$a_{2p} = 0.$$

Si  $n = 2p + 1$ , alors

$$\sin\left(\frac{(2p+1)\pi}{2}\right) = (-1)^p,$$

d'où

$$a_{2p+1} = \frac{2(-1)^p}{\pi(2p+1)}.$$

4. (3pts) Justifier proprement pourquoi  $S(0) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}$  converge. C'est une série alternée dont les termes  $u_p = \frac{1}{2p+1}$  sont positifs, décroissants, tendent vers 0. Par le critère des séries alternées (critère de Leibniz), la série converge.

5. (Bonus) (3pts) En déduire que  $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} = \frac{\pi}{4}$ . D'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier converge en  $x = 0$  vers

$$\frac{1}{2}(f(0^+) + f(0^-)) = 1.$$

Or la série de Fourier s'écrit :

$$\frac{1}{2} + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{2(-1)^p}{\pi(2p+1)} \cos((2p+1)x).$$

En  $x = 0$  :

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}.$$

Donc

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} = \frac{\pi}{4}.$$