---

1. a) Résoudre l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = 0$ sur $\mathbb{R}$. *L'équation caractéristique est:*

$$r^2 - 2r + 1 = 0 \Rightarrow (r-1)^2 = 0$$

Donc la solution homogène est:

$$y_h(x) = (C_1 + C_2 x)e^x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

b) Déterminer une solution particulière pour les seconds membres $f_1 : x \longmapsto x^2 - 3x$ et $f_2 : x \longmapsto 2e^x$. *Pour f_1, on cherche une solution particulière $y_p^{(1)}$ sous forme:*

$$y_p^{(1)} = ax^2 + bx + c, \quad (y_p^{(1)})' = 2ax + b, \qquad (y_p^{(1)})'' = 2a$$

En réinjectant dans l'équation différentielle avec terme source f_1:

$$2a - 2(2ax + b) + ax^2 + bx + c = x^2 - 3x$$

Donc

$$\begin{cases} a = 1 \\ -4a + b = -3 \\ 2a - 2b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 0 \end{cases}$$

Ainsi

$$y_p^{(1)} = x^2 + x$$

Pour f_2, comme 1 est une racine double de l'équation caractéristique donc $m = 2$, on cherche $y_p^{(2)}$ sous forme:

$$y_p^{(2)} = A\,x^2 e^x, \quad (y_p^{(2)})' = A\,(x^2 + 2x)e^x, \quad (y_p^{(2)})' = A\,(x^2 + 4x + 2)e^x$$

En réinjectant dans l'équation différentielle avec terme source f_1:

$$A\,(x^2 + 4x + 2)e^x - 2A\,(x^2 + 2x)e^x + A\,x^2 e^x = 2e^x$$

$$\Rightarrow A\,(x^2 + 4x + 2 - 2x^2 - 4x + x^2) = 2$$

$$\Rightarrow A = 1$$

Ainsi

$$y_p^{(2)} = x^2 e^x$$

c) En déduire les solutions de l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = x^2 - 3x + 2e^x$ sur $\mathbb{R}$. *Solution générale:*

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)e^x + x^2 + x + x^2 e^x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

d) Déterminer la solution du problème de Cauchy $y(0) = y'(0) = -1$. *On a:*

$$-1 = y(0) = C_1$$

et

$$y'(x) = (C_1 + C_2 x + C_2)e^x + 2x + 1 + (x^2 + 2x)e^x$$
$$-1 = y'(0) = C_1 + C_2 + 1$$

Donc

$$C_1 = -1, \quad C_2 = -1$$

Ainsi

$$y(x) = (x^2 - x - 1)e^x + x^2 + x$$

2. a) Résoudre l'équation différentielle $y'' + 2y' + y = 0$ sur $\mathbb{R}$. *L'équation caractéristique est:*

$$r^2 + 2r + 1 = 0 \Rightarrow (r + 1)^2 = 0$$

Donc la solution homogène est:

$$y_h(x) = (C_1 + C_2 x)e^{-x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

b) Déterminer une solution particulière pour les seconds membres $f_1 : x \longmapsto x^2 + 4x + 2$ et $f_2 : x \longmapsto 4(1 + x)e^x$. *Pour f_1, on cherche une solution particulière $y_p^{(1)}$ sous forme:*

$$y_p^{(1)} = ax^2 + bx + c, \quad (y_p^{(1)})' = 2ax + b, \qquad (y_p^{(1)})'' = 2a$$

En réinjectant dans l'équation différentielle avec terme source f_1:

$$2a + 2(2ax + b) + ax^2 + bx + c = x^2 + 4x + 2$$

Donc

$$\begin{cases} a = 1 \\ 4a + b = 4 \\ 2a + 2b + c = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Ainsi

$$y_p^{(1)} = x^2$$

Pour f_2, comme 1 n'est pas une racine de l'équation caractéristique donc $m = 0$, on cherche $y_p^{(2)}$ sous forme:

$$y_p^{(2)} = (Ax + B)e^x, \quad (y_p^{(2)})' = (Ax + B + A)e^x, \quad (y_p^{(2)})' = (Ax + B + 2A)e^x$$

En réinjectant dans l'équation différentielle avec terme source f_1:

$$(Ax + B)e^x + 2(Ax + B + A)e^x + (Ax + B + 2A)e^x = 4(1 + x)e^x$$

$$\Rightarrow (Ax + B) + 2\,(Ax + B + A) + (Ax + B + 2A) = 4(1 + x)$$

Donc

$$\begin{cases} A + 2A + A = 4 \\ B + 2B + 2A + B + 2A = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \end{cases}$$

Ainsi

$$y_p^{(2)} = xe^x$$

c) En déduire les solutions de l'équation $y'' + 2y' + y = x^2 + 4x + 2 + 4(1 + x)e^x$ sur $\mathbb{R}$. *Solution générale:*

$$y(x) = (C_1 + C_2\,x)e^{-x} + x^2 + xe^x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

d) Déterminer la solution du problème de Cauchy $y(0) = y'(0) = 2$. *On a:*

$$2 = y(0) = C_1$$

Et

$$y'(x) = (C_2 - C_1 - C_2\,x)e^{-x} + 2x + (x + 1)e^x$$

$$2 = y'(0) = C_2 - 2 + 1$$

Donc

$$C_1 = 2, \quad C_2 = 3$$

Ainsi

$$y(x) = (3x + 2)e^{-x} + x^2 + xe^x$$