Corrigé des exercices de préparation du test 3

Exercice 1.— Soit $\sum_{n\geq 1} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R = 1$.

1. La série $\sum_{n\geq 1} 2^{-n} a_n$ est-elle nécessairement convergente ? Justifier.
2. La série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}\, a_n$ est-elle nécessairement convergente ? Justifier.

Corrigé.

1. Oui car $x = \frac{1}{2}$ appartient à $]-1, 1[$ domaine ouvert de convergence de la série entière et donc $x = \frac{1}{2}$ appartient au domaine de convergence E de la série entière.
2. Non. Considérez $a_n = n$ pour tout $n \geq 1$. La série entière $\sum_{n\geq 1} nx^n$ est de rayon de convergence $R = 1$. En effet, on a $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n} \to 1 = \ell$ quand $n \to +\infty$, et donc on a $R = 1/\ell = 1$. Mais d'autre part, on a
$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}\, a_n = \sum_{n\geq 1} (-1)^n$$
qui n'est pas une série convergente puisque son terme général $(-1)^n$ ne tend même pas vers 0 quand $n \to +\infty$.

Exercice 2.— Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n!}{n^n}\, x^n$;
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{3^n}{n}\, x^{2n+1}$.

Corrigé.

1. La série entière s'écrit $\sum_{n\geq 1} a_n\, x^n$ avec $a_n = \frac{n!}{n^n}$. On a
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e} = \ell$$
quand $n \to +\infty$. Donc le rayon de convergence de la série entière vaut
$$R = 1/\ell = e.$$

2. Ici, on doit raisonner différemment. On pose $u_n = \left|\frac{3^n}{n}\, x^{2n+1}\right|$ et on se demande pour quels $x \neq 0$ la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge ? On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3^{n+1}}{n+1}\,|x|^{2(n+1)+1}\,\frac{n}{3^n}\,\frac{1}{|x|^{2n+1}} = 3\,\frac{n}{n+1}\,|x|^2 \to 3|x|^2$$

quand $n \to +\infty$. D'après d'Alembert, la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge pour $3|x|^2 < 1$ ($\Leftrightarrow |x| < 1/\sqrt{3}$) et diverge pour $3|x|^2 > 1$ ($\Leftrightarrow |x| > 1/\sqrt{3}$). On en déduit

$$R = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Exercice 3.—

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \cos(n)\, x^n$.

2. Déterminer alors le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(n)}{n}\, x^n$.

Corrigé.

1. On peut noter qu'on a $|\cos(n)x^n| \leq |x|^n$. Si $|x|$ est < 1, la série $\sum_{n\geq 0} |x|^n$ converge et, par comparaison, la série $\sum_{n\geq 0} |\cos(n)x^n|$ converge aussi. On en déduit $]-1,1[\subset E_a$ domaine de convergence absolue de la série entière $\sum_{n\geq 0} \cos(n)x^n$ et donc $R \geq 1$. D'autre part, $x = 1$ n'est pas dans le domaine de convergence de la série entière. Sinon, la série $\sum_{n\geq 0} \cos(n)$ convergerait et donc on aurait $\lim_{n\to+\infty} \cos(n) = 0$, ce qui est faux. On en déduit donc que $R \leq 1$. On a montré que $R = 1$.

   On rappelle une méthode pour montrer que la suite $(\cos(n))_{n\geq 0}$ ne converge pas vers 0. On raisonne par l'absurde. On suppose que la suite $(\cos(n))_{n\geq 1}$ converge vers 0 et en développant $\cos(n-1)$, on obtient :

   $$\sin(n) = \frac{\cos(n-1) - \cos(1)\cos(n)}{\sin(1)}.$$

   Il en résulte que la suite $(\sin(n))_{n\geq 1}$ converge également vers 0. Mais alors, en faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'égalité $\cos^2(n) + \sin^2(n) = 1$, on obtient $0 = 1$.

2. La série entière dérivée de la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(n)}{n}\, x^n$ est $\sum_{n\geq 1} \cos(n)\, x^{n-1}$ dont le rayon de convergence est $R = 1$ d'après la question précédente. Mais une série entière et sa série dérivée ont même rayon de convergence par un théorème du cours. Donc le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(n)}{n}\, x^n$ vaut $R = 1$ également.

Exercice 4.— Soit la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n$.

1. Calculer son rayon de convergence R.
2. Etudier la convergence de la série en $x = R$ et $x = -R$. Préciser le domaine de convergence de cette série entière.

Corrigé.

1. La série entière considérée s'écrit $\sum_{n\geq 1} a_n\, x^n$ avec $a_n = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Puisque $\sin(u) \sim u$ quand $u \to 0$, on a

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \sim \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \to 1 = \ell$$

quand $n \to +\infty$, donc $R = 1/\ell = 1$.

2. Pour $x = 1$, on doit donc considérer la série $\sum_{n\geq 1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Son terme général est équivalent à $\frac{1}{\sqrt{n}}$, terme général positif d'une série divergente. Donc la série $\sum_{n\geq 1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ diverge et $x = 1$ n'est donc pas dans le domaine de convergence E de la série entière.

   Pour $x = -1$, on doit considérer la série $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. On remarque que pour tout $n \geq 1$, le terme $\frac{1}{\sqrt{n}}$ est dans $]0, 1] \subset [0, \frac{\pi}{2}]$, intervalle sur lequel le sinus est positif et croissant. Ainsi, les termes $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ sont positifs et décroissent en n. Par ailleurs, on a $\lim_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 0$. Le critère des séries alternées s'applique et dit que la série numérique $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ converge. Le réel $x = -1$ est donc dans le domaine de convergence E de la série entière.

   Au total, on sait d'après un théorème du cours que $]-1, 1[\subset E \subset [-1, 1]$. On a montré que $1 \notin E$ et $-1 \in E$. On en déduit

$$E = [-1, 1[.$$

Exercice 5.— On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = \frac{1 - \cos(x)}{x^2}.$$

Montrer qu'elle se prolonge en une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Corrigé. Voir le corrigé de l'exercice 12 de la feuille 5.

On rappelle que la fonction cosinus admet le développement en série entière :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, x^{2n} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, x^{2n}$$

On en déduit que, pour tout $x \neq 0$, on a en faisant le changement d'indice $m = n-1$

$$f(x) = \frac{1-\cos(x)}{x^2} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, x^{2n-2} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+2)!}\, x^{2m} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4!}\, x^2 + \cdots$$

On décide de prolonger f en posant $\widetilde{f}(x) = f(x)$ si $x \neq 0$ et $\widetilde{f}(0) = \frac{1}{2}$. On a ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \widetilde{f}(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+2)!}\, x^{2m}$$

Comme $\widetilde{f}$ est la somme d'une série entière définie sur $\mathbb{R}$, elle est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6.—

1. Calculer le rayon de convergence R de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0}(n^2-1)\, x^n$.

2. Donner une expression simple de la somme de cette série entière pour $x \in]-R, R[$.

Corrigé.

1. La série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0}(n^2-1)\, x^n$ s'écrit $\sum_{n\geq 1} a_n\, x^n$ avec $a_n = n^2-1$. On a

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2-1}{n^2-1} = \frac{1+\frac{2}{n}}{1-\frac{1}{n^2}} \to 1 = \ell$$

   quand $n \to +\infty$. Donc le rayon de convergence de la série entière vaut $R = 1/\ell = 1$.

2. On décompose $n^2-1 = n(n-1)+n-1$ pour tout $n \geq 0$. On a, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}(n^2-1)\, x^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\, x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n\, x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \\ &= x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\, x^{n-2} + x \sum_{n=0}^{+\infty} n\, x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} x^n\end{aligned}$$

On a pu écrire cela car la série entière $\sum_{n\geq 0} x^n$ converge sur $]-1,1[$ et les deux autres séries entières qui apparaissent dans le membre de droite sont des séries entières dérivées de celle-ci. Elles convergent donc sur $]-1,1[$ également. De plus, pour tout $x \in]-1,1[$, on a

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} n\,x^{n-1} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}, \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\,x^{n-2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)'' = \frac{2}{(1-x)^3}. \end{cases}$$

On en déduit pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n^2-1)\,x^n = x^2\,\frac{2}{(1-x)^3} + x\,\frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x} = \frac{3x-1}{(1-x)^3}.$$

Exercice 7.—

1. Décomposer la fraction rationnelle $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)(x-1)^2}$ sous la forme

$$f(x) = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}.$$

2. En déduire le développement de f en série entière en 0.

Corrigé. Voir le corrigé de l'exercice 9 de la feuille 5 pour les détails (méthode pour obtenir les coefficients de la décomposition en éléments simples par exemple).

1. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{1,2\}$,

$$f(x) = \frac{1}{x-2} + \frac{-1}{x-1} + \frac{-1}{(x-1)^2}.$$

2. Tout d'abord, pour tout $x \in]-1,1[$, on a

$$\frac{-1}{x-1} = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

et donc

$$\frac{-1}{(x-1)^2} = -\left(\frac{1}{1-x}\right)' = -\sum_{n=0}^{+\infty} n\,x^{n-1} = -\sum_{n=1}^{+\infty} n\,x^{n-1} = -\sum_{m=0}^{+\infty} (m+1)\,x^m.$$

D'autre part, on a

$$\frac{1}{x-2} = \frac{-1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \frac{-1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{-1}{2^{n+1}}\,x^n$$

pour $|x/2| < 1$, c'est-à-dire pour $x \in]-2, 2[$. Au total, pour tout $x \in]-1, 1[$, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{-1}{2^{n+1}}\,x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\,x^n \\ &= -\sum_{n=0}^{+\infty}\left(n + \frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n. \end{aligned}$$