

I. Le but de l'exercice est d'étudier l'équation différentielle

$$(E) \quad xy' + 2y = \frac{1}{1+x}.$$

- a) *Etude de l'équation homogène.* Comme l'on se place sur \mathbb{R}_+^* , l'ensemble \mathcal{S}_H est aussi l'ensemble des fonctions $y \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}_+^*)$ telles que $y' + ay = 0$ avec $a : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $a(x) = \frac{2}{x}$. D'après le cours, si l'on note $A : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ la primitive définie par $A(x) = 2\ln(x)$, alors

$$\mathcal{S}_H = \{x \mapsto Ce^{-A(x)}, C \in \mathbb{R}\} = \{x \mapsto Cx^{-2}, C \in \mathbb{R}\}.$$

- b) *Recherche d'une solution particulière.* Une fonction $y_p : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $y_p(x) = \lambda(x)x^{-2}$, avec $\lambda \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*)$ une fonction à déterminer, est solution de (E) si et seulement si $\lambda'(x)x^{-2} = \frac{1}{x(1+x)}$ pour tout $x > 0$, ou encore

$$\lambda'(x) = \frac{x^2}{x(1+x)} = \frac{x}{1+x} = \frac{x+1-1}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}.$$

On en déduit que l'on peut choisir $\lambda(x) = x - \ln(1+x)$, et donc pour tout $x > 0$

$$y_p(x) = \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}.$$

- c) *Ensemble des solutions.* Ce sont toutes les $y : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$y(x) = \frac{x - \ln(1+x) + C}{x^2}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

- d) D'après le DL₂(0) usuel, on voit que pour tout $x > 0$

$$\frac{x - \ln(1+x) + C}{x^2} = \frac{\frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x) + C}{x^2} = \frac{1}{2} + \varepsilon(x) + \frac{C}{x^2}.$$

La seule valeur de C permettant d'avoir une limite finie est $C = 0$, car sinon $\lim_{0^+} |y_p| = +\infty$. La limite recherchée est $\ell = \frac{1}{2}$.

- e) Soit $u \in \mathcal{D}^1(]-1, +\infty[)$ une solution de (E). L'analyse faite ci-dessus sur \mathbb{R}_+^* reste valable sur $]-1, 0[$. On en déduit qu'il existe des constantes C_+ et C_- telles que

$$u(x) = \begin{cases} \frac{x - \ln(1+x) + C_-}{x^2}, & -1 < x < 0, \\ \frac{x - \ln(1+x) + C_+}{x^2}, & x > 0. \end{cases}$$

Puisque u doit être continue en 0 (et donc y posséder une limite finie), il vient comme ci-dessus $C_- = C_+ = 0$ et la valeur $u(0) = \frac{1}{2}$. On en déduit que la seule fonction u

susceptible d'être solution de (E) sur tout l'intervalle $] - 1, +\infty[$ est définie par

$$u(x) = \begin{cases} \frac{x - \ln(1+x) + C_-}{x^2}, & -1 < x < 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0, \\ \frac{x - \ln(1+x) + C_+}{x^2}, & x > 0. \end{cases}$$

Réciproquement, cette fonction est bien solution sur $] - 1, 0[$ et $]0, +\infty[$. Il reste à vérifier qu'elle est dérivable en 0 et y vérifie l'équation (E). Or, d'après le DL₃(0) usuel, pour tout $x \neq 0$ proche de 0,

$$u(x) = \frac{x - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)\right)}{x^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}x + x\varepsilon(x).$$

Cette égalité est encore valable en $x = 0$, ce qui donne un DL₁(0) de u . On en déduit que u est dérivable en 0, avec $u'(0) = -\frac{1}{3}$. Pour finir, on voit que u vérifie bien l'équation (E) en $x = 0$.

II. On considère le problème de Cauchy suivant :

$$(*) \quad \begin{cases} y'' + 4y = \sin(x), \\ y(\pi) = 1, \\ y'(\pi) = 1. \end{cases}$$

a) L'équation caractéristique est $X^2 + 4 = 0$ de racines $\pm 2i$. D'après le cours,

$$\mathcal{S}_H = \{x \mapsto \lambda \cos(2x) + \mu \sin(2x), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

b) Le second membre est de la forme $e^{\alpha x} \sin(\beta x)$ avec $\alpha = 0$ et $\beta = 1$. Or, $\alpha + i\beta$ n'est pas racine de l'équation caractéristique. On cherche donc une solution de la forme $y_p : x \mapsto a \cos(x) + b \sin(x)$. Il vient

$$\begin{aligned} y_p''(x) &= -a \cos(x) - b \sin(x), \\ y_p''(x) + 4y_p(x) &= 3a \cos(x) + 3b \sin(x). \end{aligned}$$

On choisit $b = 1/3$ et $a = 0$: une solution particulière est donnée par

$$y_p(x) = \frac{1}{3} \sin(x).$$

c) Ce sont toutes les fonctions $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$y(x) = \frac{1}{3} \sin(x) + \lambda \cos(2x) + \mu \sin(2x), \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

d) Il s'agit de trouver le couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\begin{aligned} 1 &= y(\pi) = 0 + \lambda + 0 = \lambda, \\ 1 &= y'(\pi) = -\frac{1}{3} + 0 + 2\mu. \end{aligned}$$

On trouve $\lambda = 1$ et $\mu = 2/3$, donc la solution du problème de Cauchy est

$$y(x) = \frac{1}{3} \sin(x) + \cos(2x) + \frac{2}{3} \sin(2x).$$

- III.** a) On rappelle que $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4\varepsilon(x)$.
 b) On rappelle que $\operatorname{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4\varepsilon(x)$.
 c) On rappelle que $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + x^2\varepsilon(x)$.
 d) On trouve successivement

$$\begin{aligned}\cos(x) \operatorname{ch}(x) &= \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4\varepsilon(x)\right) \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4\varepsilon(x)\right) \\ &= 1 + \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{24} - \frac{1}{4}\right) x^4 + x^4\varepsilon(x) \\ &= 1 - \frac{x^4}{6} + x^4\varepsilon(x), \\ \sqrt{1+x^2} &= 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + x^4\varepsilon(x), \\ f(x) &= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + x^4\varepsilon(x).\end{aligned}$$

- e) D'après le DL₄(0) trouvé ci-dessus, f possède un maximum local en 0, car on a un coefficient de degré un nul et un coefficient de degré deux < 0 .

- IV.** a) Puisque \sin est deux fois dérivable sur $[a, b]$, on sait qu'il existe $\theta \in]a, b[$ tel que

$$\sin(b) = \sin(a) + \cos(a)(b-a) - \frac{\sin(\theta)}{2}(b-a)^2.$$

- b) La valeur remarquable usuelle la plus proche de $\frac{\pi}{5}$ est $\frac{\pi}{6}$. On choisit donc $a = \frac{\pi}{6}$ et $b = \frac{\pi}{5}$. Il existe alors un réel θ strictement compris entre $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{5}$ tel que

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\left(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2}\sin(\theta)\left(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{6}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\pi\sqrt{3}}{60} - \sin(\theta)\frac{\pi^2}{1800}.\end{aligned}$$

En particulier,

$$\left|\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) - \frac{1}{2} - \frac{\pi\sqrt{3}}{60}\right| = |\sin(\theta)|\frac{\pi^2}{1800}.$$

Comme $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on sait que $0 < \sin(\theta) < 1$ et donc

$$|\sin(\theta)|\frac{\pi^2}{1800} < \frac{\pi^2}{1800} \leq \frac{16}{1800} < \frac{18}{1800} = \frac{1}{100},$$

ce qui donne le résultat voulu.