
Un corrigé de l'examen 2026

Exercice 1. Soit $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R = 1$.

1. Son domaine de convergence E est donc inclus dans $[-1, 1]$. Or $x = -2$ n'est pas dans $[-1, 1]$ donc pas dans E . La série numérique $\sum_{n \geq 1} (-2)^n a_n$ diverge donc.
2. La série entière $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$ où $a_n = n$ a pour rayon de convergence $R = 1$ (en effet, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} = 1$), et pourtant la série numérique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} a_n = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

Exercice 2.

1. On pose $a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$. On a

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \rightarrow 4 = \ell \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

On en déduit $R = 1/\ell = 1/4$.

2. Pour $x \neq 0$, on veut savoir si $\sum_{n \geq 1} |n! x^{n^2}|$ converge ? On pose $u_n = |n! x^{n^2}|$ et on utilise le critère de d'Alembert :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)! |x|^{(n+1)^2}}{n! |x|^{n^2}} = (n+1) |x|^{2n+1}$$

Donc

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{cases} 0 & \text{si } |x| < 1, \\ +\infty & \text{si } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Si $|x| < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0 < 1$ et donc $\sum u_n$ converge mais si $|x| \geq 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty > 1$ et donc $\sum u_n$ diverge. On en déduit que le rayon de convergence vaut $R = 1$

Exercice 3. On considère la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$.

1. a) La série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ s'écrit $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$ avec $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. On a $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} =$

$\sqrt{\frac{1}{1+1/n}} \rightarrow 1 = \ell$ quand $n \rightarrow +\infty$. On en déduit que le rayon de convergence de la série entière vaut $R = 1/\ell = 1$.

b) Pour $x = 1$, on considère la série numérique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ qui est une série de Riemann divergente. Pour $x = -1$, on considère la série numérique $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ qui est une série alternée. Comme la suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n \geq 1}$ est une suite décroissante qui converge vers 0, le critère des séries alternées dit que $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.

c) Comme on a $R = 1$, on sait que le domaine de convergence E de cette série entière vérifie $] - 1, 1[\subset E \subset [-1, 1]$. Le b) nous apprend que $1 \notin E$ et $-1 \in E$. On en déduit que $E = [-1, 1[$.

2. On pose $b_n = \frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}$ pour tout $n \geq 2$.

a) Pour tout $x \in [-1, 1[$, on a

$$\begin{aligned} (1-x)S(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{\sqrt{n}} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n-1}} \\ &= x + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n-1}} \right) x^n = x - \sum_{n=2}^{+\infty} b_n x^n \end{aligned}$$

b) Si on pose $\phi_n(x) = b_n x^n$, on a

$$\|\phi_n\|_{\infty, [-1, 1]} = \sup_{x \in [-1, 1]} |b_n x^n| = |b_n| = b_n = \frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Or la série télescopique $\sum_{n \geq 2} \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$ converge car la suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)$ converge. On en déduit que la série de fonctions $\sum_{n \geq 2} \phi_n$ converge normalement sur $[-1, 1]$.

c) Les ϕ_n étant **de plus** continues sur $[-1, 1]$, la fonction $g : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \phi_n$ est continue sur $[-1, 1]$ grâce à b), donc continue sur $[-1, 1[$. On en déduit que la fonction S qui vérifie

$$\forall x \in [-1, 1[, \quad S(x) = \frac{x - g(x)}{1 - x}$$

est continue sur $[-1, 1[$ comme quotient de fonctions continues sur $[-1, 1[$, dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[-1, 1[$.

Exercice 4.

1. La fonction y définie sur l'intervalle ouvert de convergence $] - R, R[$ par $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $] - R, R[$ et on a, pour tout $x \in] - R, R[$, $y'(x) =$

$\sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1}$. On a donc :

$$\begin{aligned}
 (x^2 - 2)y' + xy &= \sum_{n=0}^{+\infty} na_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} 2na_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} \\
 &= \sum_{m=1}^{+\infty} (m-1)a_{m-1} x^m - \sum_{m=0}^{+\infty} 2(m+1)a_{m+1} x^m + \sum_{m=1}^{+\infty} a_{m-1} x^m \\
 &= -2a_1 + \sum_{m=1}^{+\infty} \left((m-1)a_{m-1} - 2(m+1)a_{m+1} + a_{m-1} \right) x^m \\
 &= -2a_1 + \sum_{m=1}^{+\infty} \left(ma_{m-1} - 2(m+1)a_{m+1} \right) x^m
 \end{aligned}$$

Si la fonction y est solution de (E) sur $] - R, R[$ alors $-2a_1 + \sum_{m=1}^{+\infty} \left(ma_{m-1} - 2(m+1)a_{m+1} \right) x^m = -2$ pour tout $x \in] - R, R[$, autrement dit, par unicité du développement en série entière, on a

$$a_1 = 1 \quad \text{et, pour tout } n \geq 1, \quad 2(n+1)a_{n+1} - na_{n-1} = 0.$$

Par ailleurs, on a $0 = y(0) = a_0$.

2. On appelle (H_p) la propriété $a_{2p} = 0$ et $\frac{2^p (p!)^2}{(2p+1)!}$. On va démontrer par récurrence sur p que (H_p) est vraie pour tout p entier naturel.

Initialisation : il est clair que (H_0) est vrai car $a_0 = 0$ et $\frac{2^0 (0!)^2}{1!} = 1 = a_1$.

Hérédité : on suppose (H_n) vrai. On a : $2 \cdot 2(n+1)a_{2(n+1)} = (4n+4)a_{2n+2} = (2n+1)a_{2n} = 0$ donc $a_{2(n+1)} = 0$. On a aussi : $a_{2(n+1)+1} = a_{2n+3} = \frac{(2n+2)a_{2n+1}}{2(2n+3)} = \frac{2^2(n+1)^2 a_{2n+1}}{2(2n+3)(2n+2)} = \frac{2(n+1)^2 2^n (n!)^2}{(2n+3)(2n+2)(2n+1)!} = \frac{2^{(n+1)} ((n+1)!)^2}{(2(n+1)+1)!}$.

On en déduit que (H_{n+1}) est vrai, et on conclut par récurrence.

3. On a donc $y(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p+1} x^{2p+1} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2^p (p!)^2}{(2p+1)!} x^{2p+1}$. Pour déterminer son rayon de convergence, on peut utiliser le critère de d'Alembert :

$$\frac{a_{2p+3} |x|^{2p+3}}{a_{2p+1} |x|^{2p+1}} = |x|^2 \frac{2p+2}{2(2p+3)} \rightarrow \frac{x^2}{2} \quad \text{quand } p \rightarrow +\infty.$$

On en déduit que le rayon de convergence de la série entière vaut $R = \sqrt{2}$.

Commentaire. Réciproquement, si y est la fonction définie sur $] - \sqrt{2}, \sqrt{2}[$ par

$y(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2^p (p!)^2}{(2p+1)!} x^{2p+1}$, on peut remonter les calculs et on voit qu'elle est l'unique solution DSE en 0 de l'équation différentielle qui vérifie $y(0) = 0$.

Exercice 5. Soit $F : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$F(x) = \frac{\arctan x}{x} \quad \text{si } x \neq 0 \quad \text{et} \quad F(0) = 1.$$

1. Pour $x = 0$, on a $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2t^2} dt = \int_0^1 1 dt = 1 = F(0)$.

Pour $x \neq 0$, on fait le changement de variable $u = xt$ (on a donc $dt = \frac{1}{x} du$) et on a $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2t^2} dt = \int_0^x \frac{1}{1+u^2} \frac{1}{x} du = \frac{1}{x} [\arctan(u)]_0^x = \frac{\arctan(x)}{x} = F(x)$.

On a montré que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $F(x) = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2t^2} dt$.

2. a) On introduit la fonction $f : (x, t) \mapsto \frac{1}{1+x^2t^2}$ définie et continue sur $\mathbb{R} \times [0, 1]$. Ce qui implique déjà que F est définie et continue sur \mathbb{R} . On remarque que $\partial_x f(x, t)$ existe pour tout $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, 1]$ (car la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2t^2}$ est clairement dérivable sur \mathbb{R} pour tout t fixé dans $[0, 1]$) et vaut $\partial_x f(x, t) = \frac{-2xt^2}{(1+x^2t^2)^2}$. L'application $\partial_x f : (x, t) \mapsto \partial_x f(x, t) = \frac{-2xt^2}{(1+x^2t^2)^2}$ est continue sur $\mathbb{R} \times [0, 1]$. On en déduit que F est de classe C^1 sur \mathbb{R} et (formule de Leibniz)

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = \int_0^1 \partial_x f(x, t) dt = \int_0^1 \frac{-2xt^2}{(1+x^2t^2)^2} dt.$$

3. a) On rappelle

$$\forall u \in]-1, 1[, \quad \frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n.$$

On déduit que pour tout $x \in]-1, 1[$ et tout $t \in [0, 1]$, on a $-x^2t^2 \in]-1, 0]$ et

$$\frac{1}{1+x^2t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^2t^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} t^{2n}.$$

Pour tout x fixé dans $]-1, 1[$, on a

$$\forall t \in [0, 1], \quad |(-1)^n x^{2n} t^{2n}| \leq (x^2)^n$$

et la série des majorants $\sum_{n \geq 0} (x^2)^n$ converge car $0 \leq x^2 < 1$. Donc la série de fonctions (en t) converge normalement sur $[0, 1]$ et on peut intervertir $\sum_{n=0}^{+\infty}$ et \int_0^1 pour écrire

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad F(x) = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} \int_0^1 t^{2n} dt.$$

b) Comme F est la somme d'une série entière (en x) sur $]-1, 1[$, elle est de classe C^∞ sur $]-1, 1[$. Mais elle est aussi de classe C^∞ sur \mathbb{R}^* comme quotient de 2 fonctions

C^∞ sur \mathbb{R}^* dont le dénominateur ne s'annule pas sur \mathbb{R}^* . Elle est donc de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

D'après son développement en série entière, on a

$$F^{(8)}(0) = 8! a_8 = 8! (-1)^4 \int_0^1 t^8 dt = \frac{8!}{9}$$