

EXAMEN DU 4 MAI 2026
 DURÉE 2 HEURES

LES DOCUMENTS, NOTES DE COURS, CALCULATRICES SONT INTERDITS
 LES PORTABLES ET AUTRES APPAREILS ÉLECTRONIQUES DOIVENT ÊTRE ÉTEINTS PENDANT TOUTE LA
 DURÉE DE L'ÉPREUVE. L'UTILISATION DE STYLOS TYPE "FRIXION" EST FORTEMENT DÉCONSEILLÉE.

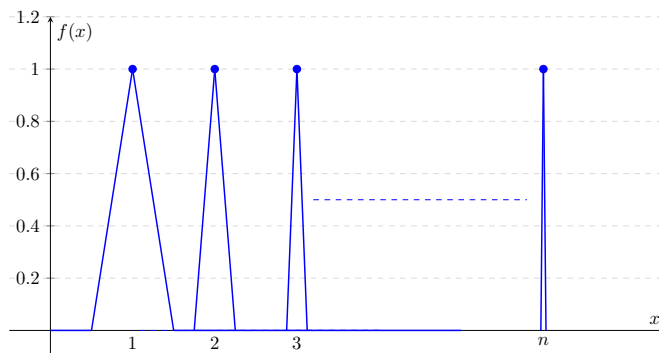
LA NOTE TIENDRA COMPTE DU SOIN APPORTÉ À LA RÉDACTION, À LA JUSTIFICATION DES CALCULS ET
 LA À RIGUEUR DES RAISONNEMENTS.

1. Intégrales généralisées, séries numériques (7 pts)

- (1) Répondre par VRAI ou FAUX en justifiant (citer un théorème ou donner un contre-exemple).
 - (a) (1pt) Si f est une fonction continue sur $[0, +\infty[$ et $t^2 f(t)dt$ a une limite (finie) lorsque t tend vers $+\infty$ alors $\int_0^\infty f(t)dt$ converge.
 - (b) (1pt) Si $(a_k)_{k \geq 1}$ est une suite décroissante alors $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k a_k$ converge.
 - (c) (1pt) Si $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ converge alors $\sum_{k=1}^{+\infty} f(k)$ converge.
- (2) (2 pts) Justifier la convergence de l'intégrale $\int_0^1 t^{2n} \ln(t)dt$ et la calculer.
- (3) (2 pts) Montrer que l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t^2} dt$ est convergente (on ne demande pas de la calculer).

Solution :

- (1) (a) VRAI car alors $|f(t)| \leq \frac{M}{t^2}$ pour une certaine constante $M > 0$ et le théorème de comparaison et le fait que $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge permet de conclure que l'intégrale est absolument convergente, donc convergente.
- (b) FAUX il faut supposer que $\lim_k a_k = 0$, sinon la série ne peut pas être convergente.
- (c) FAUX. Il faut supposer que f est décroissante. Par exemple si sur la figure f est nulle hors de $[k - \frac{1}{k^2}, k + \frac{1}{k^2}]$ l'intégrale $\int_0^n f(t)dt$ est majorée par l'aire des n premiers triangles qui est $\sum_{k=1}^n \frac{2}{k^2}$ qui converge. Mais $f(k) = 1$ donc la série $\sum_k f(k)$ diverge.



- (2) La convergence de l'intégrale ne pose pas de difficulté : pour $n = 0$ la primitive de $\ln(t)$ est $t \ln(t) - t$ qui a bien une limite en 0 et pour $n \geq 1$ on a $0 \geq t^{2n} \ln(t) \geq \ln(t)$ sur $[0, 1]$ ($\ln(t) \leq 0$ sur cet intervalle!).

Pour le calcul on fait une intégration par parties

$$\begin{aligned} \int_0^a t^{2n} \ln(t) dt &= \int_0^a \left(\frac{t^{2n+1}}{2n+1} \right)' \ln(t) dt = \\ &= \left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1} \ln(t) \right]_0^a - \int_0^a \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \frac{dt}{t} = \\ &= \frac{a^{2n+1}}{2n+1} \ln(a) - \int_0^a \frac{t^{2n}}{2n+1} dt = \frac{a^{2n+1}}{2n+1} \ln(a) - \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)^2} \end{aligned}$$

- (3) Il y a a priori un problème en 0 et en 1. Or en 0 $\frac{\ln(t)}{1-t^2} \simeq \ln(t)$ qui est de signe constant (négatif) et comme la primitive de $\ln(t)$ est $t \ln(t) - t$, on a $\int_x^1 \ln(t) dt = x - 1 - x \ln(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$ on conclut que l'intégrale converge en $x = 0$. En $x = 1$, on pose $t = 1 - u$, alors $\frac{\ln(t)}{1-t^2} = \frac{\ln(1-u)}{1-(1-u)^2} = \frac{\ln(1-u)}{u(2-u)}$ qui a une limite finie en u (car $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1-u)}{u} = -1$). Il n'y a donc en fait pas de problème en $t = 1$ et l'intégrale est convergente.

2. Suites et séries de fonctions (12 pts)

- (1) (2pt) Soit $u_k(x)$ le terme général d'une série de fonctions sur \mathbb{R} . Rappeler les définitions de la convergence normale et de la convergence uniforme de la série de fonctions. .
- (2) Répondre par VRAI ou FAUX en justifiant (citer un théorème ou donner un contre-exemple).
 - (a) (1pt) Si une série de fonctions continues converge normalement alors sa somme est continue.
 - (b) (1pt) Si une suite de fonctions T -périodiques converge simplement, sa limite est T -périodique.
- (3) On pose pour $n \geq 0$ $u_n(x) = x^{2n} \ln(x)$ pour $x \in]0, 1[$ et $u_n(0) = 0$.
 - (a) (2 pts) Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$
 - (b) (2 pts) Montrer que pour $0 < a < 1$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ converge uniformément sur $[0, a]$.
 - (c) (2pts) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$
 - (d) (2 pts) Montrer **en justifiant** que

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t^2} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{-1}{(2k+1)^2}$$

Indication: On pourra utiliser les réponses des exercices 1-(2) et 1-(3) et admettre que $\lim_{a \rightarrow 1} \ln(a) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^{2k+1}}{2k+1} = 0$.

Solution :

- (1) Convergence normale:
 $\sup_{x \in I} |u_n(x)| \leq a_n$ et $\sum_k a_k$ est convergente.
 Convergence uniforme:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N \left| \sum_{k=n}^{+\infty} f_k(x) \right| \leq \varepsilon$$

- (2) (a) VRAI. Car la convergence normale entraîne la convergence uniforme, et pour la convergence uniforme c'est un théorème du cours.
- (b) VRAI. C'est un théorème du cours.
- (3) (a) Comme $\sum_{k=0}^n x^{2k} = \frac{1-x^{2n+1}}{1-x^2}$ et que $\lim_n x^{2n+1} = 0$ pour x dans $]0, 1[$, on en déduit $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \frac{\ln(x)}{1-x^2}$

- (b) Oui, car $S_n(x) - S(x) = \frac{x^{2n+1}}{1-x^2} \ln(x) = \frac{x^{2n}}{1-x^2} \cdot x \ln(x)$. Or sur $[0, a]$ $|\frac{x^{2n}}{1-x^2}| \leq \frac{a^{2n}}{1-a^2}$ qui tend vers 0 et $x \ln(x)$ est une fonction bornée sur $[0, 1]$. La série converge donc normalement sur $[0, a]$ et par conséquent uniformément sur ce même intervalle.

Note: La convergence n'est pas uniforme sur $[0, 1[$ car si $x_n = 1 - \frac{1}{2n+1}$, $S_n(x_n) - S(x_n) = 1 - (1 - \frac{1}{2n+1})^{2n+1} \cdot \frac{\ln(x_n)}{(1-x_n)(1+x_n)}$. Or

$$\lim_n \frac{\ln(x_n)}{(1-x_n)(1+x_n)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{(1-x)(1+x)} = \frac{1}{2}$$

et donc $\lim_n S(x_n) - S_n(x_n) = \frac{1-e}{2}$

- (c) En effet sur $[0, 1]$ on a $\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)^2} \leq \frac{1}{(2k+1)^2} \leq \frac{1}{4k^2}$ qui est le terme général d'une série convergente. La série converge normalement donc uniformément. Sa limite est donc continue, et on a $\lim_{x \rightarrow 1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$.
- (d) Pour $a < 1$ on a $\int_0^a \frac{\ln(t)}{1-t^2} dt = \int_0^a \sum_{k=0}^{+\infty} t^{2k} \ln(t) dt$. La convergence uniforme sur $[0, a]$ permet d'invertir sommation et intégrale, donc en utilisant 1-(2)

$$\int_0^a \frac{\ln(t)}{1-t^2} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^a t^{2k} \ln(t) dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^{2k+1}}{2k+1} \ln(a) - \frac{a^{2k+1}}{(2k+1)^2}$$

Prenant les limites lorsque a tend vers 1, le membre de gauche tend par convergence de l'intégrale (vue en 1-(3)) vers $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t^2} dt$, le membre de droite tend, d'après la question précédente et l'indication, vers $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{-1}{(2k+1)^2}$.

Remarque: l'indication se démontre comme suit.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^{2k+1}}{2k+1} &= \int_0^a \frac{1}{1-t^2} dt = \int_0^a \frac{1}{2(1-t)} dt + \int_0^a \frac{1}{2(1+t)} dt = \\ &= \frac{1}{2} (-\ln(1-a) + \ln(1+a)) \end{aligned}$$

Or $\lim_{a \rightarrow 1} \ln(a) \ln(1+a) = 0$ et $\lim_{a \rightarrow 1} \ln(a) \ln(1-a) = \lim_{u \rightarrow 0} \ln(1-u) \ln(u) = \lim_{u \rightarrow 0} -u \ln(u) = 0$.

3. Séries de Fourier (17 pts)

- (1) Soit f la fonction définie sur $[-\pi, \pi[$ par $f(x) = -x\pi$ pour $-\pi \leq x \leq 0$ et $f(x) = x^2$ pour $0 < x < \pi$ et prolongée pour être 2π -périodique.

Répondre par VRAI ou FAUX en justifiant

- (a) (1pt) La série de Fourier réelle de f a tous ses coefficients a_n nuls ?
 (b) (2pt) La série de Fourier réelle de f converge simplement vers f ?
- (2) Soit la fonction définie par $f(x) = |x|$ sur $]-\pi, \pi[$, $f(0) = 0$ et prolongée par périodicité sur \mathbb{R} .
- (a) (1 pt) Tracer le graphe de f .
 (b) (2 pts) Montrer que f est paire.
 (c) (2 pts) Calculer les coefficients de Fourier réels de f .
 (d) (2 pts) La série de Fourier de f est elle simplement convergente ? Si oui, quelle est sa somme ?
 (e) (2 pts) La série de Fourier de f est elle uniformément convergente ?
 (f) (2pts) Montrer que si $-\pi < x < \pi$ on a

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2}$$

- (g) (1pt) En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$
 (h) (2 pts) En utilisant la formule de Parseval, calculer

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$$

Solution :

- (1) (a) $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{1}{2\pi} [\int_{-\pi}^0 -\pi t dt + \int_0^{\pi} t^2 dt] = \frac{1}{2\pi} [\frac{\pi^3}{2} + \frac{\pi^3}{3}] \neq 0$
 (b) Oui car f est continue et C^1 par morceaux, donc le théorème de Dirichlet donne la convergence simple de la série de Fourier vers f .

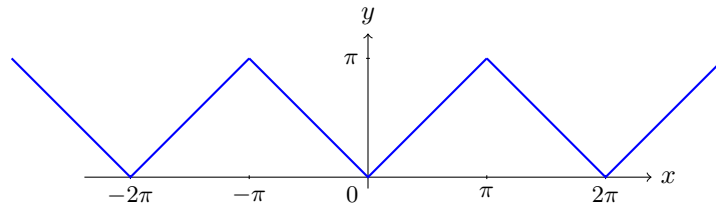


FIGURE 1. Graphe de f

- (2) (a)
 (b) En effet f est paire sur $[-\pi, \pi]$ qui est symétrique par rapport à l'origine, donc sa prolongation en une fonction 2π périodique est paire.
 (c) Comme f est paire les b_n sont nuls. On a

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t| dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t dt = \frac{\pi}{2}$$

Pour $n > 0$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t| \cos(nt) dt = \frac{1}{\pi} \left[- \int_{-\pi}^0 t \cos(nt) dt + \int_0^{\pi} t \cos(nt) dt \right] = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos(nt) dt =$$

or une intégration par parties donne

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} t \cos(nt) dt &= \left[\frac{t}{n} \sin(nt) \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\sin(nt)}{n} dt = \\ &= \left[\frac{1}{n^2} \cos(nt) \right]_0^{\pi} = \frac{1}{n^2} (\cos(n\pi) - 1) = \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \end{aligned}$$

On a donc pour $a_0 = \frac{\pi}{2}$ et pour $n > 0$

$$a_n = \begin{cases} \frac{-4}{\pi n^2} & \text{pour } n \text{ impair} \\ 0 & \text{pour } n \text{ pair} \end{cases}$$

- (d) f est continue et C^1 par morceaux. Le théorème de Dirichlet affirme donc que la série de Fourier de f converge simplement vers f
 (e) Oui, car la série de Fourier converge normalement, puisque $|b_n| \leq \frac{2}{n^2}$, donc uniformément.
 (f) On a donc sur $[-\pi, \pi]$

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2}$$

(g) En $x = 0$ on obtient

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

d'où

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

(h) La formule de Parseval donne

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k^2 + b_k^2)$$

Dans notre cas $\int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = 2\frac{\pi^3}{3}$ donc

$$\frac{\pi^2}{3} = \frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{2} \frac{16}{\pi^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$$

ce qui donne

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

4. Transformée de Fourier (10 pts)

- (1) (2pts) Donner la définition d'une fonction à décroissance rapide (i.e. dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$). Écrire la formule de sa transformée de Fourier.
- (2) (3 pts) Que dire de la transformée de Fourier de sa transformée de Fourier ? De la transformée de Fourier de $f \star g$ pour f, g dans \mathcal{S} .
- (3) On considère l'équation différentielle $u''(t) - u(t) = g(t)$, où $g \in \mathcal{S}$.
 - (a) (2pts) Écrire l'équation satisfaite par $\widehat{u}(\xi)$ utilisant $\widehat{g}(\xi)$.
 - (b) (3 pts) Résoudre cette équation. En déduire une expression de u

Solution :

- (1) Une fonction f est dans \mathcal{S} si pour tous entiers k, l la fonction $x^k f^{(l)}(x)$ est bornée (ou tend vers 0 en $\pm\infty$).

On a

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx$$

- (2) On a $\widehat{\widehat{f}}(x) = f(-x)$ et $\widehat{f \star g}(\xi) = \sqrt{2\pi} \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi)$
- (3) (a) On applique la transformée de Fourier qui est linéaire à l'équation. En utilisant $\widehat{f'}(\xi) = -i\xi \widehat{f}(\xi)$ on trouve

$$-\xi^2 \widehat{u}(\xi) - \widehat{u}(\xi) = \widehat{g}(\xi)$$

Il en résulte

$$\widehat{u}(\xi) = -\frac{\widehat{g}(\xi)}{1 + \xi^2}$$

(b) On a en utilisant la formule d'inversion de Fourier

$$u(x) = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widehat{g}(\xi)}{1 + \xi^2} e^{ix\xi} d\xi$$

Remarque: On peut donner une réponse en utilisant la convolution - ce qui n'était pas demandé ici- puisque $\mathcal{F}\left(\frac{\widehat{g}(\xi)}{1+\xi^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}(\widehat{g}) * \mathcal{F}\left(\frac{1}{1+\xi^2}\right)$ et on a vu en cours que $\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+\xi^2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|x|}$ donc

$$u(x) = \frac{-1}{2} (g * e^{-|t|})(x) = \frac{-1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-|x-t|} dt$$

FIN