

Examen

Méthodes numériques pour les EDP

Durée : 2h00. Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices sont interdites.

Lorsque les questions sont indépendantes, vous pouvez admettre un résultat pour passer à la question suivante.

Le barème est donné à titre indicatif et peut être modifié.

L'examen est découpé en 4 exercices indépendants. Le barème est donnée à titre indicatif et peut être modifié.

Exercice 1 : Question de cours (2,5 points)

1. Ecrire le schéma de diffusion **implicite** pour l'équation de la chaleur :

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x) - D \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(t, x) = 0, & \forall t > 0, \forall x \in (0, 1) \\ \phi(t = 0, \cdot) = \phi_0(\cdot), \\ \phi(t, x = 0) = 0 = \phi(t, x = 1). \end{cases} \quad (1)$$

2. Quelle est la solution de l'équation de transport à vitesse constante (v_0 est une constante réelle) :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + v_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0, & \forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \\ u(t = 0, \cdot) = u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}). \end{cases} \quad (2)$$

Correction de l'exercice 1

1. **(1,5 points)** Le schéma s'écrit :

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{D\Delta t}{\Delta x^2} (u_{i-1}^{n+1} - 2u_i^n + u_{i+1}^{n+1})$$

2. **(1 point)** $u : t, x \mapsto u_0(x - v_0 t)$

Exercice 2 : Etude de l'équation de transport conservative (7 points)

Soient $v : t, x \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{x}{1+|t|}$ (qui est bien une fonction \mathcal{C}^1) et $u_0 \in \mathbb{R} : x \mapsto u_0(x)$ une fonction \mathcal{C}^1 . Cet exercice est consacré à l'étude théorique du problème :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{x}{1+|t|} u \right] = 0, & \forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \\ u(t = 0, \cdot) = u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}), \end{cases} \quad (3)$$

1. **(0,5 points)** Montrer que cette équation peut se ré-écrire :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + v(t, x) \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha u, & \forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \\ u(t = 0, \cdot) = u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}), \end{cases} \quad (4)$$

avec α une fonction dont vous donnerez l'expression.

2. **(1 point)** Définir les caractéristiques Y de cette équation de transport (ce sont les mêmes que pour l'équation de transport classique). La résoudre en utilisant l'expression de $v : t, x \mapsto \frac{x}{1+|t|}$. On pourra se limiter au cas s et t positifs (et où $v(t, x) = \frac{x}{1+t}$)
3. Analyse : soit u une solution \mathcal{C}^1 de l'équation (4).
- (1 point)** On pose $\phi : s \mapsto u[s, Y(s, t, x)]$, obtenir une équation différentielle ordinaire sur ϕ' (attention, vous ne devez pas trouver $\phi' = 0$).
 - (2 points)** En déduire l'expression de ϕ puis en déduire l'expression de u à partir de u_0 , de l'expression de Y .
4. **(2,5 points)** Montrer que l'expression obtenue est bien solution. En déduire qu'il existe une unique solution à l'équation (4) pour la vitesse $v(t, x) = \frac{x}{1+|t|}$.

Correction de l'exercice 2

1. **(0,5 points)** Dérivons le produit $[vu]$, on obtient :

$$\frac{\partial[vu]}{\partial x} = v \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} u \quad , \quad (5)$$

on obtient donc le résultat annoncé avec $\alpha = -\frac{\partial v}{\partial x}$, soit dans notre cas :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + \frac{x}{1+|t|} \frac{\partial[vu]}{\partial x} = -\frac{1}{1+|t|} u, & \forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \\ u(t = 0, \cdot) = u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}), \end{cases} \quad (6)$$

2. **(1 points)** On trouve : L'équation caractéristique s'écrit $Y'(s) = v[s, Y(s)] = \frac{Y(s)}{1+|s|}$ qui est de la forme $Y' = a(s)Y$ et donc la solution est sous forme exponentielle d'une primitive de a . Ici, pour s positive, cette primitive est $s \mapsto \ln(1+s) - C = \ln(1+s) - \ln(1+t)$ pour tout $t, s \geq 0$. On obtient donc :

$$Y(s, t, x) = \tilde{C} e^{\ln(1+s) - \ln(1+t)} = x e^{\ln \frac{1+s}{1+t}} = x \frac{1+s}{1+t} \quad (7)$$

la constante C étant déterminée à l'aide de la donnée initiale $Y(s = t) = x$.

3. a) ϕ est \mathcal{C}^1 par composition et on calcule **(1 points)** :

$$\begin{aligned} \phi'(s) &= \frac{d}{ds} \left\{ u[s, Y(s)] \right\} \\ &= \frac{\partial u}{\partial t} [s, Y(s)] + \frac{dY}{ds}(s) \times \frac{\partial u}{\partial x} [s, Y(s)] \\ &= \alpha(s, Y(s)) \phi(s) \\ &= -\frac{1}{1+|s|} \phi(s) \end{aligned}$$

- b) On déduit **(2 points)** de cette EDO linéaire $\phi' = \alpha(s)\phi(s)$, pour tout $s, t \geq 0$:

$$\begin{aligned} \phi(s) &= \phi(0) e^{\int_0^s \frac{-ds}{1+s}} \\ &= \phi(0) e^{-\ln(1+s)} \\ &= \frac{1}{1+s} \phi(0) \end{aligned} \quad \textbf{(0,5 points)}$$

Puis pour tout $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} u(t, x) &= u[t, Y(t)] \\ &= \phi(s = t) \quad \textbf{(0,5 points)} \\ &= \frac{1}{1+t} \phi(0) \\ &= \frac{1}{1+t} u_0(Y(0)) \\ &= \frac{1}{1+t} u_0\left[\frac{x}{1+t}\right] \quad \textbf{(1 points)} \end{aligned}$$

4. L'expression de u de la question précédente la définit de façon unique, donc il y a unicité de la solution **(0,5 points)**. Il reste à montrer l'existence, pour cela montrons que l'expression précédente définit bien une solution. D'abord, par composition de fonction usuelle, elle est bien \mathcal{C}^1 . Calculons ses dérivées :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{1+t} u'_0\left[\frac{x}{1+t}\right] \times \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{x}{1+t}\right] \\ &= \frac{1}{(1+t)^2} u'_0\left[\frac{x}{1+t}\right] \end{aligned} \quad \textbf{(0,5 points)}$$

Et donc :

$$v(t, x) \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{(1+t)^3} u'_0\left[\frac{x}{1+t}\right]$$

Pour la dérivée en temps :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{1}{(1+t)^2}u_0\left[\frac{x}{1+t}\right] + \frac{1}{1+t}\frac{\partial}{\partial t}\left(u_0\left[\frac{x}{1+t}\right]\right) \\
 &= -\frac{1}{1+t}u(t,x) + \frac{1}{1+t}u'_0\left[\frac{x}{1+t}\right] \times \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{x}{1+t}\right) \\
 &= -\frac{1}{1+t}u(t,x) - \frac{x^2}{(1+t)^3}u'_0\left[\frac{x}{1+t}\right] \\
 &= -\frac{1}{1+t}u(t,x) - v(t,x)\frac{\partial u}{\partial x}
 \end{aligned} \tag{1,5 points}$$

Finalement on en déduit l'égalité :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{1+t}u(t,x) \tag{0,5 points}$$

Enfin, en $t = 0$, on trouve trivialement $u(0,x) = u_0(x)$. La fonction u ainsi construite est donc bien l'unique solution de (3). Ceci conclut.

Exercice 3 : Schéma de Lax-Friedrichs pour l'équation de transport (6 points)

Dans cet exercice on étudie le problème suivant sur un intervalle borné :

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t}(t,x) + v(t,x)\frac{\partial \phi}{\partial x}(t,x) = 0, & \forall t > 0, \forall x \in [0; 1], \\ \phi(t=0, \cdot) = \phi_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}). \end{cases} \tag{8}$$

On notera $\phi : t, x \mapsto \phi(t,x)$ la solution exacte de (8) et on supposera que la vitesse $v(t,x)$ est bornée par $\|v\|_\infty$. Le schéma de Lax-Friedrichs s'écrit, pour j allant de 1 à $Nx - 1$:

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) - \frac{v_j^n \Delta t}{2\Delta x}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n), \tag{9}$$

Avec conditions limites périodiques :

$$u_0^{n+1} = \frac{1}{2}(u_1^n + u_{Nx-1}^n) - \frac{v_0^n \Delta t}{2\Delta x}(u_1^n - u_{Nx}^n), \tag{10}$$

$$u_{Nx}^{n+1} = u_0^{n+1}, \tag{11}$$

$$\tag{12}$$

où Δt est le pas de temps et Δx est le pas d'espace ($\Delta x = \frac{1}{Nx}$), et $v_i^n := v(t^n, x_i)$. On supposera de plus que la donnée initiale est une fonction $\mathcal{C}^2([0, 1])$ telle que $\phi_0(0) = \phi_0(1)$.

Dans toutes les questions suivantes, on pourra se contenter d'étudier la formule donnée pour i compris entre 1 et $Nx - 1$.

1. **(3 points)** Ecrire l'erreur de consistance du schéma. Montrer qu'il est d'ordre au moins 1 en temps et en espace.
2. **(2 points)** Montrer que le schéma est l^∞ stable sous une condition que vous rappellerez (de type CFL).
3. **(1 point)** En déduire (et démontrer) la convergence conditionnelle du schéma et donner sa vitesse de convergence.

Correction de l'exercice 3

1. a) Notons ϕ la solution exacte et $\phi_i^n = \phi(t^n, x_i)$ sa discrétisation en temps et en espace. L'erreur de consistance est **(0,5 points)** :

$$\varepsilon(t^{n+1}, x_i) = (\phi_i^{n+1} - \frac{\phi_{i+1}^n + \phi_{i-1}^n}{2}) + \left[\frac{v_i^n \Delta t}{\Delta x} (\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n) \right] \tag{13}$$

- b) **(2,5 + 0,5 points)** Supposons que la solution est au moins de classe \mathcal{C}^2 (**bonus 0,5 points**), on a alors par l'inégalité de Taylor-Lagrange **(1 point)** :

$$\begin{aligned}
 \phi_i^{n+1} &= \phi_i^n + \Delta t \partial_t \phi(t^n, x_i) + R_t(t^n, x_i) \\
 \phi_{i+1}^n &= \phi_i^n + \Delta x \partial_x \phi(t^n, x_i) + R_x^+(t^n, x_i) \\
 &= \phi_i^n + \tilde{R}_x^+(t^n, x_i) \\
 \phi_{i-1}^n &= \phi_i^n - \Delta x \partial_x \phi(t^n, x_i) + R_x^-(t^n, x_i) \\
 &= \phi_i^n + \tilde{R}_x^-(t^n, x_i)
 \end{aligned}$$

Et il existe cinq constantes C_t, C_1 et C_2, C_3, C_4 indépendantes de t et x telles que :

$$\begin{aligned} |R_t(t, x)| &\leq C_t \Delta t^2 \\ |R_x^+(t, x)| &\leq C_1 \Delta x^2 \\ |R_x^-(t, x)| &\leq C_2 \Delta x^2 \\ |\tilde{R}_x^+(t, x)| &\leq C_3 \Delta x \\ |\tilde{R}_x^-(t, x)| &\leq C_4 \Delta x \end{aligned}$$

On en déduit : **(1,5 points)**

$$\begin{aligned} \phi_i^{n+1} - \frac{\phi_{i-1}^n + \phi_{i+1}^n}{2} &= \Delta t \partial_t \phi(t^n, x_i) + R_t(t^n, x_i) + \frac{\tilde{R}_x^-(t^n, x_i) + \tilde{R}_x^+(t^n, x_i)}{2} \\ \frac{v_i^n \Delta t}{2 \Delta x} (\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n) &= v_i^n \Delta t \frac{\partial \phi}{\partial x}(t^n, x_i) + \frac{v_i^n \Delta t}{2 \Delta x} (R_x^+(t^n, x_i) + R_x^-(t^n, x_i)) \end{aligned}$$

Puis :

$$\begin{aligned} \varepsilon(t^{n+1}, x_i) &= \Delta t \left[\overbrace{\partial_t \phi(t^n, x_i) + v(t^n, x_i) \frac{\partial \phi}{\partial x}(t^n, x_i) + \alpha \phi(t^n, x_i)}^{=0} \right] + R_t(t^n, x_i) \\ &\quad + \frac{\tilde{R}_x^-(t^n, x_i) + \tilde{R}_x^+(t^n, x_i)}{2} + \frac{v_i^n \Delta t}{2 \Delta x} \left[(R_x^+(t^n, x_i) + R_x^-(t^n, x_i)) \right] \\ |\varepsilon(t^{n+1}, x_i)| &\leq C_t \Delta t^2 + \frac{C_3 + C_4}{2} \Delta x^2 + \frac{C_1 + C_2}{2} \|v\|_\infty \Delta t \Delta x \end{aligned}$$

Le schéma est donc d'ordre au moins 1 en temps et au moins 1 en espace.

2. a) **(2 points)** On pose $\alpha_i^n = \frac{v_i^n \Delta t}{\Delta x}$ et on ré-écrit le schéma sous la forme :

$$u_i^{n+1} = \frac{1 + \alpha}{2} u_{i-1}^n + \frac{1 - \alpha}{2} u_{i+1}^n \quad (14)$$

On en déduit que, $\forall i \neq 0, N_x$ (et comme $\kappa, \Delta t$ et Δx sont positifs) :

$$\begin{aligned} |u_i^{n+1}| &\leq \frac{|1 + \alpha_i^n|}{2} |u_{i-1}^n| + \frac{|1 - \alpha_i^n|}{2} |u_{i+1}^n| \\ &\leq \frac{1}{2} \left[|1 - \alpha_i^n| + |1 + \alpha_i^n| \right] \|u^n\|_\infty \end{aligned}$$

Puis si $-1 \leq \alpha_i^n \leq 1$:

$$|u_i^{n+1}| \leq \frac{1}{2} \left[1 - \alpha_i^n + 1 + \alpha_i^n \right] \|u^n\| \leq \|u^n\|$$

On obtient dans l'inégalité annoncée sous la condition :

$$\forall i, n : \left| \frac{v_i^n \Delta t}{\Delta x} \right| \leq 1 \quad \text{c'est à dire} \quad \frac{\|v\|_\infty \Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad (15)$$

qui est la condition CFL classique. Sous cette condition, le schéma est l^∞ linéairement stable et donc l^∞ stable.

3. **(1 points)** Le schéma est d'ordre au moins 1 en temps et au moins 1 en espace et l^∞ stable sous condition CFL. D'après le théorème de Lax, il est donc convergent en norme l^∞ et il existe une constante C telle que $\forall n, i : |u_i^n - \phi_i^n| \leq C(\Delta t + \Delta x)$ sous la condition $\frac{\|v\|_\infty \Delta t}{\Delta x} \leq 1$.

Exercice 4 : Equation de Schrödinger (6 points)

Dans tout l'exercice, on considère l'équation aux dérivées partielles :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - i \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \forall (t, x) \in]0; +\infty[\times]0; 2\pi[\quad , \\ u(t = 0, \cdot) = u_0 \quad , \\ u(t, 0) = u(t, 2\pi) \quad , \end{cases} \quad (16)$$

avec u_0 de classe C^4 .

On admet que la solution peut se prolonger par périodicité, nous allons donc la chercher sous la forme d'une série de Fourier :

$$u : t, x \mapsto \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k[u(t)]e^{ikx} \quad (17)$$

avec $\phi_k(t) = c_k[u(t)]$ les coefficients de Fourier (qui ne dépendent que du temps). Pour u_0 , on définira coefficients de Fourier par :

$$c_k[u_0] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_0(x)e^{-ikx} dx \quad .$$

1. Analyse (**2 points**) : soit u une solution au moins C^2 de l'équation (16).
 - a) Obtenir une équation différentielle sur $\phi_k(t)$. *Indication : il devra s'agir d'une équation différentielle linéaire du premier ordre.*
 - b) En déduire l'expression de $\phi_k(t)$ (cette expression dépendra de $c_k[u_0]$).
2. Synthèse : Pour l'expression $\phi_k(t)$ obtenue à la question précédente, montrer que :
 - a) la série (17) définit bien une fonction qui continue en (t, x) , de classe C^1 par rapport à la variable t et de classe C^2 par rapport à la variable x .
 - b) En déduire qu'elle est solution et que c'est l'unique solution au problème.

Correction de l'exercice 4

1. (**2 points**)

- a) L'égalité $\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x) - i\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(t, x) = 0$ implique une égalité sur chacun des coefficients de Fourier des 2 membres de l'égalité. Or les coefficients de Fourier de la dérivée seconde en x de u sont obtenus par multiplication (cf théorème du cours ou IPP) (**0,5 points**) :

$$\left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right]_k = -\pi^2 k^2 \phi_k(t)$$

On admet qu'on a l'égalité (**0,5 points**) :

$$\left[\frac{\partial \phi}{\partial t} \right]_k = \phi'_k(t)$$

(cette dernière peut se justifier en utilisant le fait que ϕ est C^1 sur tout compact $[0; T] \times [0; 1]$ puis en permutant intégrale et dérivation)

On obtient alors (**0,5 points**) :

$$\begin{aligned} \phi'_k(t) + ik^2\pi^2\phi_k(t) &= \alpha\phi_k(t), \\ \phi'_k(t) &= -i\pi^2k^2\phi_k(t) \end{aligned}$$

avec $\beta_k = \alpha - \kappa\pi^2k^2$.

- b) (**0,5 points**) On a obtenu une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 1 ! Sa solution est donc $\phi_k(t) = \phi_k(0) \exp^{-i\pi^2k^2t} = c_k[u_0] \exp^{-i\pi^2k^2t}$.
2. (**4,5 points**) Comme $u_0 \in C^4$, il existe $C > 0$ telle que pour tout $k \geq 1$, $|c_k[u_0]| \leq \frac{C}{k^4}$ (**0,5 points**). Posons

$$u_k : t, x \mapsto c_k[u_0]e^{-i\pi^2k^2t}e^{ikx} = \phi_k(t) \exp ikx$$

Pour u_k et ses dérivées, on en déduit donc les majorations suivantes pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}^2$ (**1,5 points**) :

$$\begin{aligned} |u_k(t, x)| &= |c_k[u_0]| && \leq \frac{C}{k^4} && \text{sommable} \\ \left| \frac{\partial u_k}{\partial t}(t, x) \right| &= | -i\pi^2k^2c_k[u_0]e^{-i\pi^2k^2t}e^{ikx} | && \leq \frac{C\pi^2}{k^2} && \text{sommable} \\ \left| \frac{\partial u_k}{\partial x}(t, x) \right| &= | ik \times c_k[u_0]e^{-i\pi^2k^2t}e^{ikx} | && \leq \frac{C}{k^3} && \text{sommable} \\ \left| \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2}(t, x) \right| &= | -k^2 \times c_k[u_0]e^{-i\pi^2k^2t}e^{ikx} | && \leq \frac{C}{k^2} && \text{sommable} \end{aligned}$$

$u_k, \frac{\partial u_k}{\partial t}, \frac{\partial u_k}{\partial x}, \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2}$ sont donc uniformément (en t, x) majorés par des suites sommables. D'après les théorèmes de continuité et dérivation sous le signe somme, la fonction u est donc bien définie, continue en (t, x) , continuellement dérivable en t et deux fois continuellement dérivable en x . (**1 points**)

De plus, les dérivées de u sont les sommes des dérivées de u_k ; dès lors comme $\frac{\partial u}{\partial t} - i\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, on en déduit que u est solution de (16) (**1 points**) car elle vérifie aussi la condition initiale par convergence dominée vers u_0 (**0,5 points**). D'après l'analyse précédente, c'est bien la seule solution et le problème est bien posé (**0,5 points**).