

ALGÈBRE LINÉAIRE AVANCÉE ET NUMÉRIQUE

EXAMEN 2025-2026

- (1) (a) Donner une décomposition en valeurs singulières de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1 \quad 1)$$

La matrice A est de rang 1. On utilise donc la forme compacte de la SVD, avec $r = 1$ valeur singulière strictement positive. On a

$$A = 2 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_U (1 \quad 1) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_U \underbrace{(4)}_S \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} (1 \quad 1)}_{V^\top},$$

car $\frac{4}{2} = 2$. Les colonnes U et V sont de norme 1 et la valeur singulière est $4 = \|A\|$.

- (b) Si A admet une décomposition en valeurs singulières, calculer $A^\top A$ et expliquer comment calculer des matrices V et S compatibles. Donner ensuite une formule permettant de calculer U en fonction de A , V et S . Montrer que ces choix donnent bien une décomposition en valeurs singulières. Supposons $A = USV^\top$ avec $U^\top U = I$, $V^\top V = I$ et S diagonale à coefficients > 0 . Comme V est carrée, $VV^\top = I$ aussi. Alors

$$A^\top A = VSU^\top USV^\top = VS^2V^\top.$$

C'est une diagonalisation en base orthonormée de $A^\top A$, les colonnes de V sont des vecteurs propres orthonormés de $A^\top A$ et les coefficients de S sont les racines carrées des valeurs propres. La matrice $A^\top A$ est symétrique réelle, donc diagonalisable en base orthonormée (théorème spectral). On a $A^\top A = V\Lambda V^\top$ avec V orthogonale. De plus, pour $x \neq 0$,

$$x^\top A^\top A x = \|Ax\|^2 > 0,$$

car A est de rang M donc injective. Les valeurs propres λ_i sont donc strictement positives. On pose

$$S = \Lambda^{1/2} = \text{diag}(\sqrt{\lambda_i}), \quad U = AVS^{-1}.$$

On a bien que :

(i) Colonnes de U orthonormées :

$$U^\top U = S^{-1}V^\top A^\top AVS^{-1} = S^{-1}V^\top (VS^2V^\top)VS^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = I.$$

(ii) $USV^\top = AVS^{-1}SV^\top = AVV^\top = A$.

Donc on a bien une décomposition en valeurs singulières.

- (c) Donner une décomposition en valeurs singulières de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

En déduire sa norme induite par la norme euclidienne, et sa norme de Frobenius. On suit la méthode de (b) :

$$A^\top A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice a pour valeurs propres 3 et 1, avec les vecteurs propres orthonormés

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Donc

$$S = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On calcule $u_i = Av_i/\sigma_i$:

$$Av_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow u_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad Av_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \end{pmatrix}}_U \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{V^\top}.$$

On a bien $u_1 \cdot u_2 = \frac{1-1}{\sqrt{12}} = 0$ et $\|u_1\| = \|u_2\| = 1$. La norme induite par la norme euclidienne est la plus grande valeur singulière :

$$\|A\|_2 = \sigma_1 = \sqrt{3}.$$

La norme de Frobenius est $\|A\|_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \sqrt{3+1} = 2$. On le vérifie directement : la somme des carrés des coefficients vaut $1+0+0+1+1+1=4$.

- (2) On cherche à résoudre $Ax = b$ par la méthode de Richardson $x_{n+1} = x_n - \alpha(Ax_n - b)$, avec

$$A = \text{diag}(1, 4), \quad b = (1, 1)^\top$$

et $x_0 = 0$.

- (a) Donner x_2 pour un pas $\alpha = 1$.

$$x_1 = x_0 - (Ax_0 - b) = b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = x_1 - (Ax_1 - b) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

- (b) Donner l'allure des lignes de niveau de $\frac{1}{2}x^\top Ax - x^\top b$. Soit $f(x) = \frac{1}{2}x^\top Ax - x^\top b = \frac{1}{2}x_1^2 + 2x_2^2 - x_1 - x_2$. En complétant les carrés, on obtient

$$f(x) = \frac{1}{2}(x_1 - 1)^2 + 2\left(x_2 - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{5}{8}.$$

Le minimum est atteint en $x^* = A^{-1}b = (1, \frac{1}{4})^\top$, avec $f(x^*) = -\frac{5}{8}$. Les lignes de niveau $\{f = c\}$, avec $r = c + \frac{5}{8}$, sont

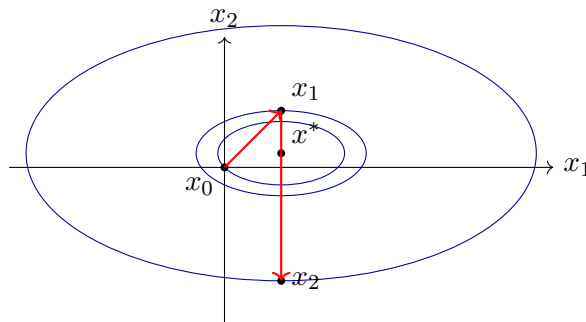
- (i) Vides pour $r < 0$;
- (ii) Réduites au point x^* pour $r = 0$;
- (iii) Des ellipses centrées en x^* , d'axes parallèles aux axes de coordonnées (les vecteurs propres de A), de demi-axes $\sqrt{2r}$ selon x_1 et $\sqrt{r/2}$ selon x_2 , pour $r > 0$.

Le rapport des demi-axes est $2 = \sqrt{\lambda_{\max}/\lambda_{\min}}$, les ellipses sont allongées selon x_1 .

- (c) Calculer le gradient de $\frac{1}{2}x^T Ax - x^T b$. Indiquer x_2 sur le schéma des lignes de niveau. Comme A est symétrique, $\nabla f(x) = Ax - b$. La méthode de Richardson est donc une descente de gradient à pas constant : $x_{n+1} = x_n - \alpha \nabla f(x_n)$. Les itérés sont $x_0 = (0, 0)$, $x_1 = (1, 1)$, $x_2 = (1, -2)$

(i) en x_0 , $\nabla f = -b = (-1, -1)$, d'où le pas $+(1, 1)$;

(ii) en x_1 , $\nabla f = (0, 3)$, d'où le pas $(0, -3)$ qui dépasse largement le minimum en x_2 .



- (d) Donner une relation de récurrence sur le résidu $r_n = Ax_n - b$, et en déduire son expression générale. Posons $r_n = Ax_n - b$. Alors

$$r_{n+1} = Ax_{n+1} - b = Ax_n - \alpha A(Ax_n - b) - b = (I - \alpha A)r_n.$$

Donc

$$r_n = (I - \alpha A)^n r_0, \quad r_0 = -b, \quad r_n = - \begin{pmatrix} (1 - \alpha)^n \\ (1 - 4\alpha)^n \end{pmatrix}.$$

Pour $\alpha = 1$, on a $r_1 = -(0, -3) = (0, 3)$, ce qui est cohérent avec le calcul de (c).

- (e) Comment choisir α de façon à minimiser ce résidu ? On a $\|r_n\| \leq \rho(I - \alpha A)^n \|r_0\|$ avec

$$\rho(\alpha) = \max(|1 - \alpha|, |1 - 4\alpha|).$$

La méthode converge si et seulement si $\rho < 1$, soit $0 < \alpha < \frac{1}{2} = 2/\lambda_{\max}$. Pour $\alpha = 1$, $|1 - 4\alpha| = 3 > 1$, la méthode diverge, comme on l'a vu. Le minimum de ρ est atteint quand $1 - \alpha = -(1 - 4\alpha)$

$$\alpha_{\text{opt}} = \frac{2}{\lambda_{\min} + \lambda_{\max}} = \frac{2}{5}, \quad \rho_{\text{opt}} = \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} = \frac{3}{5}, \quad \kappa = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} = 4.$$

- (f) Pour le α optimal, combien d'itérations environ faudra-t-il pour résoudre le problème à une précision 10^{-10} (on ne demande pas une réponse précise mais un ordre de grandeur). On veut $(3/5)^n \leq 10^{-10}$, soit

$$n \geq \frac{10 \ln 10}{\ln(5/3)} \approx \frac{23,0}{0,51} \approx 45$$

Il faut donc de l'ordre de 45 itérations (de l'ordre de la cinquantaine)

- (g) Combien d'itérations faudra-t-il à une méthode de Krylov comme la méthode du gradient conjugué ? Le gradient conjugué construit $x_n \in x_0 + \mathcal{K}_n(A, r_0)$ minimisant f sur cet espace. Ici A n'a que 2 valeurs propres distinctes (et $\dim = 2$), et $b = (1, 1)^T$ n'est pas vecteur propre, donc $\mathcal{K}_2 = \text{Vect}(b, Ab) = \mathbb{R}^2$. En arithmétique exacte, la méthode converge donc en 2 itérations.

- (3) On se propose de calculer la puissance n -ième de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

via le calcul fonctionnel holomorphe.

- (a) En décomposant la matrice en sa partie diagonale et hors-diagonale et en utilisant une série de Neumann, calculer l'inverse de $z - M$ si b est suffisamment petit, à z fixé.

Pourquoi le calcul reste-t-il valable quand b n'est pas petit ? On a $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = D + N$, avec $D = \text{diag}(a, c)$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Pour $z \notin \{a, c\}$,

$$z - M = (z - D) - N = (z - D)(I - K)$$

avec

$$K = (z - D)^{-1}N = \begin{pmatrix} 0 & \frac{b}{z-a} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La série de Neumann $(I - K)^{-1} = \sum_{k \geq 0} K^k$ converge si $\|K\| < 1$, par exemple si $|b| < |z - a|$: c'est la condition « b suffisamment petit à z fixé ». Comme $K^2 = 0$, la série est finie : $(I - K)^{-1} = I + K$, d'où

$$(z - M)^{-1} = (I + K)(z - D)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{z-a} & \frac{b}{(z-a)(z-c)} \\ 0 & \frac{1}{z-c} \end{pmatrix}.$$

La formule ne contient aucune série infinie. On vérifie directement, par multiplication,

$$\begin{pmatrix} z-a & -b \\ 0 & z-c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{z-a} & \frac{b}{(z-a)(z-c)} \\ 0 & \frac{1}{z-c} \end{pmatrix} = I,$$

et cela est valable pour tout b et tout $z \notin \{a, c\}$.

- (b) Montrer que, si f est holomorphe à l'intérieur d'un contour C qui entoure une fois λ dans le sens trigonométrique,

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - \lambda} dz = f(\lambda) \cdot 2\pi i,$$

Soit f holomorphe au voisinage de l'intérieur de C et λ à l'intérieur. La fonction

$$g(z) = \frac{f(z) - f(\lambda)}{z - \lambda}$$

se prolonge en une fonction holomorphe en λ (singularité apparente, $g(\lambda) = f'(\lambda)$). Par le théorème de Cauchy

$$\oint_C g(z) dz = 0$$

Donc

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - \lambda} dz = \oint_C g(z) dz + f(\lambda) \oint_C \frac{dz}{z - \lambda} = 0 + f(\lambda) \cdot 2\pi i$$

car $\oint_C \frac{dz}{z - \lambda} = 2\pi i$.

- (c) En utilisant la formule

$$M^n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{1}{z - M} z^n dz$$

pour un contour qu'on précisera, calculer M^n dans le cas où $a \neq c$. On pensera à utiliser la décomposition d'une fraction en éléments simples. On prend pour C un

cercle (parcouru dans le sens trigonométrique) de rayon $R > \max(|a|, |c|)$, qui entoure les deux valeurs propres a et c . Alors

$$M^n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{1}{z - M} z^n dz.$$

On calcule coefficient par coefficient avec (a) et (b) :

- (i) $(1, 1)$, $\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{z^n}{z-a} dz = a^n$
- (ii) $(2, 2)$, c^n
- (iii) $(2, 1)$, 0
- (iv) $(1, 2)$, pour $a \neq c$, on décompose en éléments simples

$$\frac{1}{(z-a)(z-c)} = \frac{1}{a-c} \left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-c} \right)$$

$$\text{d'où } b \frac{a^n - c^n}{a - c}.$$

Finalement, pour $a \neq c$,

$$M^n = \begin{pmatrix} a^n & b \frac{a^n - c^n}{a - c} \\ 0 & c^n \end{pmatrix}.$$

Pour $n = 1$ on a M . Pour $n = 2$ on obtient $b \frac{a^2 - c^2}{a - c} = b(a + c)$, ce qui est bien le coefficient de M^2 .

- (d) Que se passe-t-il quand $a = c$? Vérifier la cohérence avec la formule du binôme (pourquoi est-elle applicable?) Si $a = c$, on a

$$(z - M)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{z-a} & \frac{b}{(z-a)^2} \\ 0 & \frac{1}{z-a} \end{pmatrix}$$

avec un pôle double. En écrivant $z^n = (a + (z - a))^n = a^n + na^{n-1}(z - a) + \dots$, on trouve

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{z^n}{(z-a)^2} dz = na^{n-1}$$

Seul le terme en $(z-a)^1$ contribue, c'est $(z^n)'|_{z=a}$. Donc

$$M^n = \begin{pmatrix} a^n & nba^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}.$$

On remarque que $M = aI + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^2 = 0$. La formule du binôme est applicable car aI et N commutent

$$M^n = \sum_k \binom{n}{k} a^{n-k} N^k = a^n I + na^{n-1} N = \begin{pmatrix} a^n & nba^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}.$$

On retrouve bien le même résultat.

- (e) Calculer $f(M)$ pour une fonction f holomorphe sur $\mathbb{C}$ quelconque. Soit f entière et C un cercle de rayon $R > \max(|a|, |c|)$. Alors

$$f(M) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z)(z - M)^{-1} dz.$$

Les mêmes calculs que ci-dessus donnent, pour $a \neq c$,

$$f(M) = \begin{pmatrix} f(a) & b \frac{f(a) - f(c)}{a - c} \\ 0 & f(c) \end{pmatrix}$$

Et pour $a = c$,

$$f(M) = \begin{pmatrix} f(a) & b f'(a) \\ 0 & f(a) \end{pmatrix}.$$

On retrouve (c) et (d) avec $f(z) = z^n$.