

ALGÈBRE LINÉAIRE AVANCÉE ET NUMÉRIQUE

PARTIEL 2025-2026

1. EXERCICES

- (1) Donner une expression de $(A + B)^{-1}$ en tant que série, en supposant que A est inversible. À quelle condition est-elle convergente? *On suppose A inversible. On factorise*

$$A + B = A(I + A^{-1}B).$$

Si $(I + A^{-1}B)$ est inversible, alors

$$(A + B)^{-1} = (I + A^{-1}B)^{-1}A^{-1}.$$

On pose $U = -A^{-1}B$ et on utilise la série de Neumann : pour toute matrice U telle que la série $\sum_{k=0}^{+\infty} U^k$ converge,

$$(I - U)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} U^k.$$

La série de Neumann $\sum_{k=0}^{+\infty} U^k$ converge (en norme) si et seulement si le rayon spectral de U vérifie $\rho(U) < 1$. Une condition suffisante est : pour une norme matricielle subordonnée $\|\cdot\|$,

$$\|U\| = \|A^{-1}B\| < 1.$$

Ainsi, la série

$$(A + B)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k (A^{-1}B)^k A^{-1}$$

est convergente dès que $\|A^{-1}B\| < 1$.

- (2) Montrer que la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.001 & 0.001 & 0.001 \\ 0.001 & 2 & 0.001 & 0.001 \\ 0.001 & 0.001 & 3 & 0.001 \\ 0.001 & 0.001 & 0.001 & 4 \end{pmatrix}$$

est inversible, avec le moins de calcul possible. *On décompose $M = A + B$ avec*

$$A = \text{diag}(1, 2, 3, 4), \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0.001 & 0.001 & 0.001 \\ 0.001 & 0 & 0.001 & 0.001 \\ 0.001 & 0.001 & 0 & 0.001 \\ 0.001 & 0.001 & 0.001 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a que A est inversible avec

$$A^{-1} = \text{diag}\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right).$$

D'après la question précédente, M est inversible dès que $\|A^{-1}B\| < 1$. On majore avec la norme subordonnée à la norme infinie

$$\|A^{-1}B\|_{\infty} \leq \|A^{-1}\|_{\infty} \cdot \|B\|_{\infty}.$$

Ainsi,

$$\|A^{-1}\|_{\infty} = \max\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right) = 1, \quad \|B\|_{\infty} = 0.001 \times 3 = 0.003$$

Donc

$$\|A^{-1}B\|_{\infty} \leq 1 \times 0.003 = 0.003 < 1.$$

La condition de convergence de la série de Neumann est satisfaite M est inversible.

(3) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Diagonaliser la matrice A en base orthonormée, avec le moins de calcul possible. Dessiner schématiquement les ensembles de niveau de la forme quadratique $x \mapsto \langle x, Ax \rangle - x_1$. A est une matrice symétrique réelle, donc diagonalisable en base orthonormée (théorème spectral).

On remarque que $A = I + J$ avec $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, la matrice de la symétrie qui échange les deux coordonnées. On lit directement les vecteurs propres de J , donc de A , sans calculer de polynôme caractéristique :

$$J \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \implies A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$J \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \implies A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres sont donc $\lambda_1 = 3$ et $\lambda_2 = 1$. Les vecteurs

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

sont normés et orthogonaux (vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes d'une matrice symétrique réelle). Avec $P = (u_1 \mid u_2)$, on a

$$P^{-1}AP = P^{\top}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On pose

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1}AP = P^{\top}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

On développe

$$q(x) = \langle x, Ax \rangle - x_1 = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - x_1.$$

On effectue le changement de variables $x = Py$, donc

$$x_1 = \frac{y_1+y_2}{\sqrt{2}}, \quad x_2 = \frac{-y_1+y_2}{\sqrt{2}}$$

Donc

$$\langle x, Ax \rangle = \langle y, P^{\top}APy \rangle = y_1^2 + 3y_2^2.$$

Ainsi

$$q = y_1^2 + 3y_2^2 - \frac{y_1+y_2}{\sqrt{2}} = y_1^2 - \frac{y_1}{\sqrt{2}} + 3y_2^2 - \frac{y_2}{\sqrt{2}}.$$

On complète le carré dans chaque variable

$$q = \left(y_1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{1}{8} + 3\left(y_2 - \frac{1}{6\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{1}{24}.$$

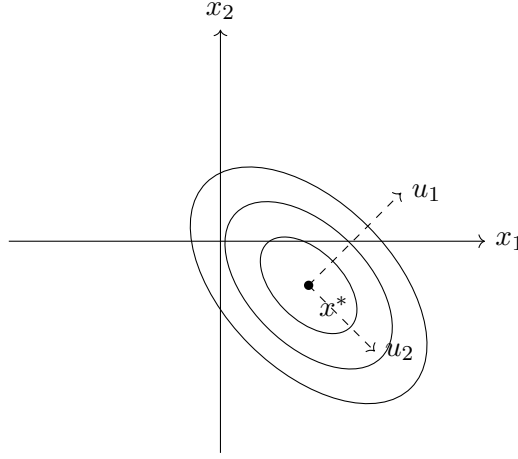
En posant $z_1 = y_1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}$ et $z_2 = y_2 - \frac{1}{6\sqrt{2}}$, les ensembles de niveau $\{q = c\}$ s'écrivent

$$z_1^2 + 3z_2^2 = c + \frac{1}{8} + \frac{1}{24} = c + \frac{1}{6}.$$

Pour $c > -\frac{1}{6}$, ce sont des ellipses centrées en $z = 0$ (i.e. au point $x^* = P(y_1^*, y_2^*)^\top$ avec $y_1^* = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, $y_2^* = \frac{1}{6\sqrt{2}}$), dont les axes sont alignés avec les vecteurs propres u_1 et u_2 .

$$x^* = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

On peut vérifier en faisant $\nabla q(x) = 2Ax - e_1 = 0 \iff Ax = (\frac{1}{2}, 0)^\top \iff x = (\frac{1}{3}, -\frac{1}{6})^\top$. Le minimum de q vaut $-\frac{1}{6}$, atteint en x^* . Posons $r = c + \frac{1}{6}$. Pour $c > -\frac{1}{6}$, c'est une ellipse centrée en x^* , d'axes dirigés par u_1 et u_2 , de demi-axes $\sqrt{r/3}$ selon $(1, 1)$ (petit axe) et $\sqrt{r}$ selon $(1, -1)$ (grand axe). Le rapport des demi-axes est $\sqrt{3}$ (racine du rapport des valeurs propres).



Si $c < -\frac{1}{6}$: l'ensemble de niveau est vide. Et si $c = -\frac{1}{6}$: c'est le point $\{x^*\}$.

- (4) Montrer que si A est symétrique réelle et à valeurs propres strictement positives, alors $q(x) = x^T Ax$ est définie positive. Puisque A est symétrique réelle, le théorème spectral garantit l'existence d'une base orthonormée de vecteurs propres. Il existe une matrice orthogonale $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ (i.e. $P^\top P = I$) et une matrice diagonale

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \quad \lambda_i > 0 \quad \forall i,$$

telles que $A = PDP^\top$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$. On effectue le changement de variable $y = P^\top x$. Puisque P est orthogonale, $P^\top$ est inversible, donc $x \neq 0 \implies y \neq 0$. On calcule

$$q(x) = x^\top Ax = x^\top (PDP^\top)x = (P^\top x)^\top D (P^\top x) = y^\top Dy.$$

Or

$$y^\top Dy = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2.$$

Puisque $\lambda_i > 0$ pour tout i et que $y \neq 0$, on obtient

$$q(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 \geq \lambda_{\min} \sum_{i=1}^n y_i^2 = \lambda_{\min} \|y\|^2 > 0,$$

où $\lambda_{\min} = \min_i \lambda_i > 0$. Ainsi $q(x) > 0$ pour tout $x \neq 0$, et $q(0) = 0$. Ainsi, la forme quadratique q est définie positive.

2. TRANSFORMÉE DE FOURIER MULTIDIMENSIONNELLE

On considère l'espace $\mathbb{C}^{N \times N}$ modélisant des signaux bidimensionnels de taille $N \times N$ (par exemple, des images de $N \times N$ pixels). On utilisera comme dans le cas monodimensionnel les notations $x_{i,j}$, pour $i, j = 0, \dots, N-1$, avec la convention que

$$x_{i+kN, j+lN} = x_{i,j}$$

pour tout $k, l \in \mathbb{Z}$. L'espace $\mathbb{C}^{N^2}$ est muni de sa structure euclidienne canonique

$$x * y = \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \overline{x_{ij}} y_{ij}.$$

- (1) On considère l'application linéaire de décalage "horizontal" donné par $(Tx)_{i,j} = x_{i+1,j}$. Donner l'expression de sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^{N \times N}$ donnée par $(e_{ij})_{i',j'} = \delta_{i,i'} \delta_{j,j'}$ pour $i, j, i', j' = 0, \dots, N-1$. L'expliciter dans le cas $N = 2$. On calcule l'image de chaque vecteur de base. Pour $x = e_{i',j'}$, on a

$$(Te_{i',j'})_{i,j} = (e_{i',j'})_{i+1,j} = \delta_{i+1,i'} \delta_{j,j'} = \delta_{i,i'-1 \bmod N} \delta_{j,j'}.$$

Donc $Te_{i',j'} = e_{i'-1 \bmod N, j'}$. Les coefficients matriciels sont

$$(M_T)_{(i,j),(i',j')} = \delta_{i,i'-1 \bmod N} \delta_{j,j'}.$$

En ordonnant la base comme $(e_{0,0}, e_{0,1}, e_{1,0}, e_{1,1})$

$$Te_{0,0} = e_{1,0} \quad Te_{0,1} = e_{1,1} \quad Te_{1,0} = e_{0,0} \quad Te_{1,1} = e_{0,1}.$$

D'où

$$M_T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (2) Calculer l'action de l'adjoint T^* sur un vecteur x (on pourra utiliser la formule $\langle x, Ty \rangle = \langle T^*x, y \rangle$ pour tout $y \in \mathbb{C}^{N \times N}$). En déduire que T est unitaire. Soit $x, y \in \mathbb{C}^{N \times N}$. On calcule $\langle x, Ty \rangle$

$$\langle x, Ty \rangle = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \overline{x_{i,j}} (Ty)_{i,j} = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \overline{x_{i,j}} y_{i+1,j}.$$

On effectue le changement d'indice $i' = i + 1 \bmod N$ (i.e. $i = i' - 1 \bmod N$), qui est une bijection sur $\{0, \dots, N-1\}$

$$\langle x, Ty \rangle = \sum_{i'=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \overline{x_{i'-1,j}} y_{i',j}.$$

Par unicité de l'adjoint, on identifie

$$(T^*x)_{i,j} = x_{i-1,j}$$

T^* est donc le décalage horizontal dans le sens opposé : $(T^*x)_{i,j} = x_{i-1,j}$. Reste à montrer que $T^*T = TT^* = I$.

$$(T^*Tx)_{i,j} = (Tx)_{i-1,j} = x_{(i-1)+1,j} = x_{i,j}$$

donc

$$T^*T = I.$$

$$(TT^*x)_{i,j} = (T^*x)_{i+1,j} = x_{(i+1)-1,j} = x_{i,j}$$

donc

$$TT^* = I.$$

- (3) Donner l'ensemble des valeurs propres de T . Quelle est leur multiplicité ? Donner une base orthogonale de vecteurs propres. On cherche $\lambda \in \mathbb{C}$ et $x \neq 0$ tels que $(Tx)_{i,j} = \lambda x_{i,j}$, i.e. $x_{i+1,j} = \lambda x_{i,j}$ pour tout i, j . La récurrence en i donne $x_{i,j} = \lambda^i x_{0,j}$. La condition de périodicité $x_{i+N,j} = x_{i,j}$ impose

$$\lambda^N = 1.$$

Les valeurs propres sont donc exactement les racines N -ièmes de l'unité

$$\lambda_k = e^{2\pi i k/N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Pour chaque valeur propre λ_k , le vecteur propre associé doit satisfaire $x_{i,j} = \lambda_k^i x_{0,j}$, où $x_{0,j}$ est libre pour chaque $j \in \{0, \dots, N-1\}$. L'espace propre associé à λ_k est donc de dimension N (un degré de liberté par colonne j). Ceci est cohérent avec $\sum_{k=0}^{N-1} N = N^2 = \dim \mathbb{C}^{N \times N}$. Chaque valeur propre λ_k est de multiplicité N . Pour $k \in \{0, \dots, N-1\}$ et $l \in \{0, \dots, N-1\}$, on pose

$$(f_{k,l})_{i,j} = \frac{1}{N} e^{2\pi i k i/N} e^{2\pi i l j/N} = \frac{1}{N} \omega_N^{ki} \omega_N^{lj}, \quad \omega_N = e^{2\pi i/N}.$$

Vecteur propre :

$$(Tf_{k,l})_{i,j} = (f_{k,l})_{i+1,j} = \frac{1}{N} \omega_N^{k(i+1)} \omega_N^{lj} = \omega_N^k (f_{k,l})_{i,j} = \lambda_k (f_{k,l})_{i,j}$$

. Reste à vérifier l'orthogonalité

$$\langle f_{k,l}, f_{k',l'} \rangle = \frac{1}{N^2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \omega_N^{-ki} \omega_N^{-lj} \omega_N^{k'i} \omega_N^{l'j} = \frac{1}{N^2} \left(\sum_{i=0}^{N-1} \omega_N^{(k'-k)i} \right) \left(\sum_{j=0}^{N-1} \omega_N^{(l'-l)j} \right)$$

$$\langle f_{k,l}, f_{k',l'} \rangle = \delta_{k,k'} \delta_{l,l'}.$$

La famille $(f_{k,l})_{0 \leq k, l \leq N-1}$ est donc une base orthonormée de $\mathbb{C}^{N \times N}$ constituée de vecteurs propres de T .

- (4) Soit A une application linéaire sur $\mathbb{C}^{N \times N}$ qui commute avec T . Dédurre de la question précédente que, dans la base de vecteurs propres trouvée précédemment, la matrice A est diagonale par blocs. Soit $E_k = \text{Vect}(f_{k,l}, l = 0, \dots, N-1)$ l'espace propre de T associé à $\lambda_k = \omega_N^k$. Soit $x \in E_k$, i.e. $Tx = \lambda_k x$. Alors

$$T(Ax) = A(Tx) = A(\lambda_k x) = \lambda_k (Ax),$$

donc $Ax \in E_k$. On ordonne la base orthonormée $(f_{k,l})_{k,l}$ en regroupant d'abord par valeur de k

$$\underbrace{f_{0,0}, \dots, f_{0,N-1}}_{E_0}, \underbrace{f_{1,0}, \dots, f_{1,N-1}}_{E_1}, \dots, \underbrace{f_{N-1,0}, \dots, f_{N-1,N-1}}_{E_{N-1}}.$$

Puisque chaque E_k est stable par A , et que les E_k sont deux à deux orthogonaux, tout vecteur $f_{k,l} \in E_k$ est envoyé par A dans E_k , il n'y a pas de couplage entre blocs distincts. Autrement dit

$$\langle f_{k',l'}, Af_{k,l} \rangle = 0 \quad \text{si } k' \neq k.$$

La matrice de A dans cette base est donc diagonale par blocs

$$[A] = \begin{pmatrix} B_0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_{N-1} \end{pmatrix},$$

où chaque bloc $B_k \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ est la restriction de A à E_k , de coefficients

$$(B_k)_{l',l} = \langle f_{k,l'}, Af_{k,l} \rangle, \quad l, l' \in \{0, \dots, N-1\}.$$

- (5) On suppose maintenant que A commute avec T ainsi qu'avec l'application de décalage "vertical" $(Rx)_{ij} = x_{i,j+1}$. Comment peut-on diagonaliser A ? Par le même raisonnement qu'à la question précédente, R est unitaire et ses valeurs propres sont les racines N -ièmes de l'unité $\mu_l = \omega_N^l$, $l = 0, \dots, N-1$, avec les mêmes vecteurs propres $f_{k,l}$

$$(Rf_{k,l})_{i,j} = (f_{k,l})_{i,j+1} = \frac{1}{N} \omega_N^{ki} \omega_N^{l(j+1)} = \omega_N^l (f_{k,l})_{i,j} = \mu_l f_{k,l}.$$

Les $f_{k,l}$ sont simultanément vecteurs propres de T et de R . Puisque A commute avec T et avec R , le lemme de stabilité s'applique aux deux opérateurs, pour tout k, l ,

$$T(Af_{k,l}) = \lambda_k (Af_{k,l}), \quad R(Af_{k,l}) = \mu_l (Af_{k,l}).$$

Ainsi $Af_{k,l}$ est un vecteur propre commun de T et R pour les valeurs propres (λ_k, μ_l) . Or l'espace propre commun

$$F_{k,l} = \ker(T - \lambda_k I) \cap \ker(R - \mu_l I) = \text{Vect}(f_{k,l})$$

est de dimension 1. En effet, $f_{k,l}$ est l'unique vecteur (à scalaire près) vérifiant simultanément $x_{i+1,j} = \omega_N^k x_{i,j}$ et $x_{i,j+1} = \omega_N^l x_{i,j}$, ce qui détermine entièrement $x_{i,j} = x_{0,0} \omega_N^{ki} \omega_N^{lj}$. Donc $Af_{k,l} \in F_{k,l}$, ce qui signifie

$$Af_{k,l} = \hat{A}_{k,l} f_{k,l},$$

pour un certain scalaire $\hat{A}_{k,l} \in \mathbb{C}$. A est diagonale dans la base orthonormée $(f_{k,l})_{0 \leq k, l \leq N-1}$, avec valeurs propres $\hat{A}_{k,l} = \langle f_{k,l}, Af_{k,l} \rangle$. En particulier, A est entièrement déterminée par sa transformée de Fourier discrète 2D : tout opérateur commutant avec T et R est une convolution 2D circulaire.