

ALGÈBRE LINÉAIRE AVANCÉE ET NUMÉRIQUE

RATTRAPAGE 2025-2026

On rappelle qu'une forme quadratique $x \rightarrow q(x)$ est dite semi-définie positive si $q(x) \geq 0$ pour tout x , et définie positive si $q(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

- (1) Soit N une matrice carrée nilpotente, c'est-à-dire telle que $N^p = 0$ pour un certain $p \in \mathbb{N}$. Montrer que $I - N$ est inversible et donner une expression de son inverse sous forme d'une somme finie. En déduire l'inverse de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit N nilpotente avec $N^p = 0$. Comme I et N commutent on a

$$(I - N)(I + N + \cdots + N^{p-1}) = I - N^p = I,$$

et de même dans l'autre ordre. Donc $I - N$ est inversible et

$$(I - N)^{-1} = \sum_{k=0}^{p-1} N^k.$$

On écrit $A = I - N$ avec

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^3 = 0.$$

Donc

$$A^{-1} = I + N + N^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (2) Exprimer la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -9 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

en fonction de la matrice A précédente. En déduire que B est inversible, et calculer son inverse. Soit $D = \text{diag}(1, 2, 3)$. Multiplier A à droite par D multiplie la j -ème colonne par d_j

$$AD = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -9 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = B.$$

Donc $B = AD$ est un produit de deux matrices inversibles, donc inversible, et

$$B^{-1} = D^{-1}A^{-1} = \text{diag}\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

(3) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Diagonaliser la matrice A en base orthonormée, avec le moins de calcul possible. Dessiner schématiquement les ensembles de niveau de la forme quadratique $x \rightarrow \langle x, Ax \rangle$. On

remarque $A = I + 2J$ avec $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Donc

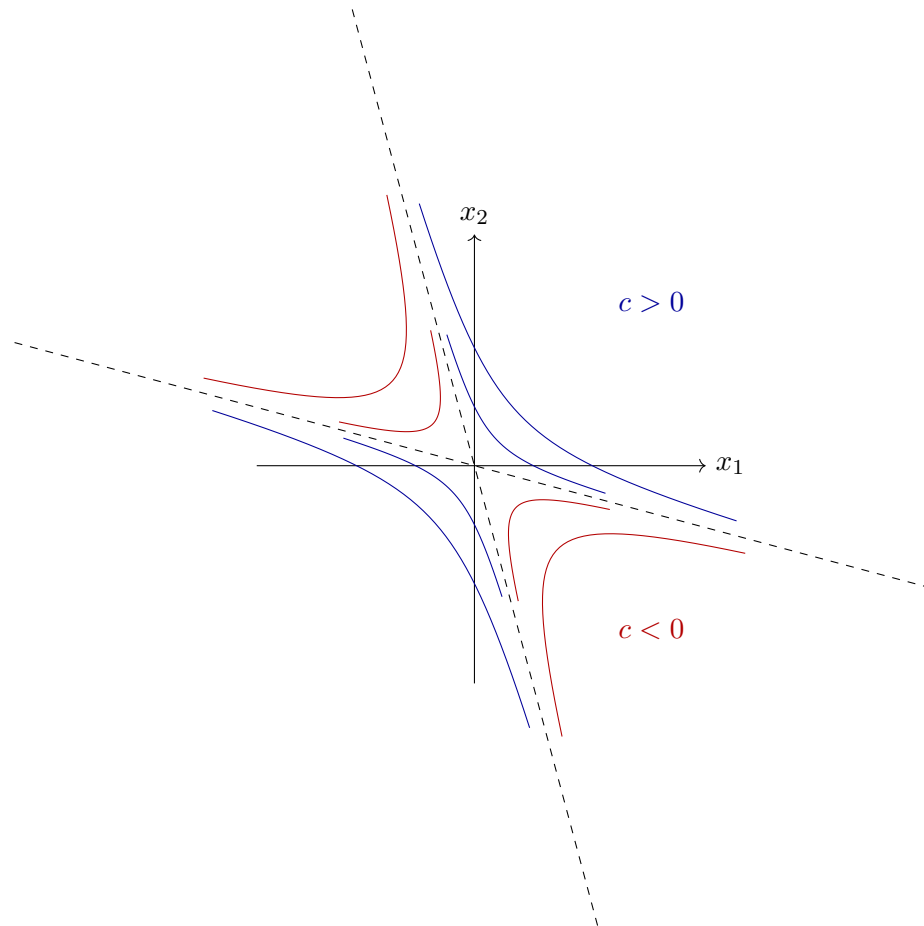
$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux (valeurs propres distinctes d'une matrice symétrique) et normés. Avec $P = (u_1 \mid u_2)$

$$P^T A P = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Avec $x = Py$, on a $q(x) = \langle x, Ax \rangle = 3y_1^2 - y_2^2$. La forme est indéfinie (une valeur propre positive, une négative). Les ensembles de niveau $\{q = c\}$ sont

- (a) Pour $c = 0$, deux droites $y_2 = \pm \sqrt{3} y_1$ (les asymptotes), qui se croisent en 0 ;
- (b) Pour $c > 0$, des hyperboles $3y_1^2 - y_2^2 = c$ dont les branches coupent l'axe dirigé par $u_1 = (1, 1)$;
- (c) Pour $c < 0$, des hyperboles dont les branches coupent l'axe dirigé par $u_2 = (1, -1)$.



- (4) Soit A une matrice symétrique réelle, et $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Montrer que la matrice $z - A$ est inversible, et que

$$\|(z - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\operatorname{Im}(z)|}.$$

Soit A symétrique réelle et $z = s + it$ avec $t = \operatorname{Im}(z) \neq 0$. D'après le théorème spectral, $A = P\Lambda P^\top$ avec P orthogonale et $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_i)$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Alors

$$z - A = P(z - \Lambda)P^\top, \quad z - \Lambda = \operatorname{diag}(z - \lambda_i).$$

Comme λ_i est réel et $z \notin \mathbb{R}$,

$$|z - \lambda_i| \geq |\operatorname{Im}(z - \lambda_i)| = |t| > 0,$$

donc $z - \Lambda$ est inversible, et $z - A$ aussi, avec

$$(z - A)^{-1} = P \operatorname{diag}\left(\frac{1}{z - \lambda_i}\right) P^\top.$$

P étant orthogonale (donc unitaire), elle conserve la norme euclidienne, et

$$\|(z - A)^{-1}\| = \max_i \frac{1}{|z - \lambda_i|} \leq \frac{1}{|t|} = \frac{1}{|\operatorname{Im}(z)|}.$$

- (5) Soit $B \in \mathbb{R}^{N \times M}$ une matrice quelconque. Montrer que $B^\top B$ est symétrique et que la forme quadratique $x \rightarrow x^\top B^\top B x$ est semi-définie positive. À quelle condition sur B est-elle définie positive? On a $(B^\top B)^\top = B^\top (B^\top)^\top = B^\top B$, la matrice est symétrique. Pour tout $x \in \mathbb{R}^M$,

$$x^\top B^\top B x = (Bx)^\top (Bx) = \|Bx\|^2 \geq 0,$$

donc la forme est semi-définie positive. Elle est définie positive si et seulement si

$$\|Bx\|^2 = 0 \Rightarrow x = 0,$$

c'est-à-dire $\operatorname{Ker} B = \{0\}$: B est injective (ses colonnes sont linéairement indépendantes, $\operatorname{rang} B = M$, ce qui impose $N \geq M$).

- (6) Soit A une matrice carrée de taille N . Supposons qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^N$,

$$x^\top A x \geq \alpha \|x\|^2.$$

Montrer que A est inversible. Montrer que $\alpha \|x\| \leq \|Ax\|$, et en déduire une borne sur $\|A^{-1}\|$. Si $Ax = 0$, alors $0 = x^\top A x \geq \alpha \|x\|^2$, donc $x = 0$. A est injective, et comme elle est carrée, elle est inversible. Par Cauchy-Schwarz,

$$\alpha \|x\|^2 \leq x^\top A x \leq \|x\| \|Ax\|,$$

d'où $\alpha \|x\| \leq \|Ax\|$ (trivial pour $x = 0$, et on divise par $\|x\|$ sinon). Pour $y \in \mathbb{R}^N$, on applique ce qui précède à $x = A^{-1}y$:

$$\alpha \|A^{-1}y\| \leq \|y\|, \quad \text{donc} \quad \|A^{-1}\| \leq \frac{1}{\alpha}.$$

- (7) On cherche à résoudre le système linéaire $Ax = b$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

par la méthode de Richardson $x_{n+1} = x_n + \alpha(b - Ax_n)$, avec $x_0 = 0$. Donner l'expression de x_n . En déduire une condition suffisante sur α pour que x_n converge vers la solution $A^{-1}b$. On a

$$x_{n+1} = (I - \alpha A)x_n + \alpha b$$

La solution $x^* = A^{-1}b = (1, \frac{1}{9})^\top$ vérifie $x^* = (I - \alpha A)x^* + \alpha b$. L'erreur $e_n = x_n - x^*$ satisfait donc

$$e_{n+1} = (I - \alpha A)e_n, \quad e_n = (I - \alpha A)^n e_0 = -(I - \alpha A)^n x^*.$$

Comme $I - \alpha A = \text{diag}(1 - \alpha, 1 - 9\alpha)$,

$$x_n = \begin{pmatrix} 1 - (1 - \alpha)^n \\ \frac{1}{9}(1 - (1 - 9\alpha)^n) \end{pmatrix}.$$

La suite converge vers x^* dès que $|1 - \alpha| < 1$ et $|1 - 9\alpha| < 1$, c'est-à-dire

$$0 < \alpha < \frac{2}{9}.$$

- (8) Soit A une matrice $N \times M$. En utilisant la décomposition en valeurs singulières $A = USV^\top$, avec U et V à colonnes orthonormales et S diagonale à diagonale positive $(s_1, \dots, s_r)$, montrer que

$$\|A\|_2 = \max_{i=1, \dots, r} s_i, \quad \|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^r s_i^2$$

où $\|\cdot\|_2$ est la norme induite par la norme euclidienne et $\|\cdot\|_F$ la norme de Frobenius. Soit $A = USV^\top$ avec $U^\top U = I_r$, $V^\top V = I_r$ et $S = \text{diag}(s_1, \dots, s_r)$, $s_i > 0$. Pour la norme 2, pour $x \in \mathbb{R}^M$, posons $y = V^\top x$. Comme $U^\top U = I$,

$$\|Ax\|^2 = x^\top V S U^\top U S V^\top x = \|Sy\|^2 = \sum_{i=1}^r s_i^2 y_i^2 \leq s_{\max}^2 \|y\|^2.$$

Or $V V^\top$ est le projecteur orthogonal sur $\text{Im} V$, donc $\|y\| = \|Vy\| = \|V V^\top x\| \leq \|x\|$ (on a $\|Vy\| = \|y\|$ car $V^\top V = I$). Ainsi $\|Ax\| \leq s_{\max} \|x\|$, d'où $\|A\|_2 \leq s_{\max}$. L'égalité est atteinte : si $s_k = s_{\max}$ et v_k est la k -ème colonne de V , alors $V^\top v_k = e_k$ et $\|Av_k\| = \|Se_k\| = s_k$, avec $\|v_k\| = 1$. Donc

$$\|A\|_2 = \max_i s_i.$$

Pour la norme de Frobenius, on a $\|A\|_F^2 = \text{tr}(A^\top A)$ et, par invariance de la trace par permutation circulaire,

$$\text{tr}(A^\top A) = \text{tr}(V S U^\top U S V^\top) = \text{tr}(V S^2 V^\top) = \text{tr}(S^2 V^\top V) = \text{tr}(S^2) = \sum_{i=1}^r s_i^2.$$

- (9) Soit A une matrice $N \times M$. Montrer que

$$\text{Ker}(A) = \text{Im}(A^\top)^\perp$$

On utilise $\langle A^\top y, x \rangle = \langle y, Ax \rangle$ pour $x \in \mathbb{R}^M$, $y \in \mathbb{R}^N$.

($\subset$) Si $Ax = 0$, alors pour tout y , $\langle A^\top y, x \rangle = \langle y, Ax \rangle = 0$, donc $x \perp \text{Im}(A^\top)$.

($\supset$) Si $x \perp \text{Im}(A^\top)$, alors $\langle y, Ax \rangle = \langle A^\top y, x \rangle = 0$ pour tout y . En prenant $y = Ax$, on obtient $\|Ax\|^2 = 0$, donc $Ax = 0$.

Ainsi $\text{Ker}(A) = \text{Im}(A^\top)^\perp$.

- (10) Soit A une matrice $N \times M$. Calculer le gradient de l'application $x \rightarrow \|Ax\|^2$ définie sur $\mathbb{R}^M$. Soit $f(x) = \|Ax\|^2 = x^\top A^\top A x$. Pour $h \in \mathbb{R}^M$

$$f(x+h) = \|Ax + Ah\|^2 = f(x) + 2\langle Ax, Ah \rangle + \|Ah\|^2 = f(x) + \langle 2A^\top Ax, h \rangle + O(\|h\|^2)$$

car $\|Ah\|^2 \leq \|A\|^2 \|h\|^2$. Donc

$$\nabla f(x) = 2A^\top Ax.$$